

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Л. В. Борисова, В. В. Новиков,
С. В. Тышкевич, А. В. Шаталина

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие для студентов
механико-математического, физического
и геологического факультетов

Издание второе, исправленное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2004

УДК 517.55(075.8)
ББК 22.161.5я73
Б82

Борисова Л. В., Новиков В. В., Тышкевич С. В., Шаталина А. В.
Б82 Теория функций комплексной переменной: Учеб. пособие для студентов мех.-мат., физ. и геол. фак. 2-е изд., испр. и доп. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. – 84 с.: ил. (Б-ка "Основы математики"; Вып. 26).
ISBN 5-292-03290-5

Пособие содержит краткие теоретические сведения, задачи и упражнения по теории аналитических функций. Особое внимание уделено изучению элементарных функций в комплексной области, конформным отображениям, которые могут осуществить эти функции. К некоторым задачам и упражнениям даны полные решения.

Для студентов механико-математического, физического, геологического факультетов.

Рекомендуют к печати:

Кафедра теории функций и приближений
механико-математического факультета
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук *В. Ю. Ольшанский*

УДК 517.55(075.8)
ББК 22.161.5я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 5-292-03290-5

© Борисова Л. В., Новиков В. В.,
Тышкевич С. В., Шаталина А. В., 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Программа курса по теории функций комплексной переменной	5
Глава 1. Методические указания к программе	7
Глава 2. Комплексные числа	9
Глава 3. Конформные отображения	12
3.1. Дробно-линейная функция	12
3.2. Показательная и тригонометрические функции комплексного аргумента	15
3.3. Логарифмы комплексных чисел. Степень с действительным показателем	18
3.4. Функция Жуковского	25
3.5. Конформные отображения, определяемые комбинациями основных элементарных функций	28
Глава 4. Интеграл от функции комплексной переменной	31
4.1. Понятие интеграла от функции комплексной переменной	31
4.2. Интегральная теорема Коши	32
4.3. Интегральная формула Коши	34
Глава 5. Степенные ряды	37
5.1. Понятие степенного ряда	37
5.2. Ряд Тейлора	38
5.3. Ряд Лорана	45
5.4. Классификация изолированных особых точек однозначного характера аналитической функции	48
Глава 6. Вычеты	51
6.1. Вычисление вычетов	51
6.2. Вычисление интегралов с помощью вычетов	56
Контрольные работы	63
<i>Библиографический список</i>	<i>83</i>

ВВЕДЕНИЕ

Теория функций комплексной переменной (теория аналитических функций) в рамках университетского курса является в основном продолжением курса математического анализа.

Основы теории функций комплексной переменной (ТФКП) были заложены в середине XVIII века Л. Эйлером, а как самостоятельная ветвь математики дисциплина оформилась около середины XIX века благодаря работам О. Коши, К. Вейерштрасса, Ю. В. Сохоцкого и Б. Римана.

Сейчас ТФКП является одним из важнейших разделов математики. Ее идеи и результаты проникли во многие другие математические дисциплины, такие как алгебраическая топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, математическая физика, функциональный анализ, теория вероятностей, вычислительная математика и др. Методы ТФКП стали привычными и в ряде прикладных дисциплин (гидро- и аэромеханика, теория упругости, теория элементарных частиц). В связи с этим курс ТФКП является обязательным на всех отделениях механико-математического, физического и геологического факультетов.

Относительная легкость формального усвоения теоретического материала сочетается с серьезными трудностями в овладении конкретными методами ТФКП. На экзамене же студент обязан показать свое умение решать конкретные задачи.

Материал пособия авторы старались изложить так, чтобы максимально помочь читателю овладеть основами ТФКП. С этой целью здесь подробно разобрано большое количество примеров. Авторы надеются, что примеры помогут студентам глубже усвоить теоретический материал и приобрести навыки в решении задач. Кроме того, пособие содержит задачи, подобные тем, которые предлагаются в контрольных работах и на экзаменах. В указаниях содержатся практические рекомендации к решению задач и соответствующие разъяснения. В качестве образцов в заключительной части пособия приведены контрольные работы, предлагаемые студентам на зачетах.

Изучение теоретического курса [4, 6] рекомендуется сопровождать решением задач из соответствующих разделов задачника [5]. В целях облегчения усвоения материала и подготовки к экзамену в этом пособии программа по ТФКП написана в основном в форме экзаменационных вопросов. При этом каждый вопрос снабжен ссылкой на наиболее подходящий (с точки зрения авторов настоящего пособия) учебник.

ПРОГРАММА КУРСА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие аналитической функции действительной переменной. Переход к комплексной переменной. Предмет теории аналитических функций и роль этой теории в математике и ее приложениях [2, введение].

2. Комплексные числа, действия над ними. Их геометрическое изображение на плоскости и на сфере. Бесконечно удаленная точка [1, гл. 1, §1, 2].

3. Множества точек на плоскости: открытые, замкнутые, связные. Путь, кривая, область, граница области. Теория пределов: сходящиеся последовательности и ряды комплексных чисел [1, гл. 1, §1 – 4].

4. Функции комплексной переменной. Предел. Непрерывность, равномерная непрерывность [1, гл. 2, §1, 2, гл.2, §1 – 4].

5. Понятие производной и дифференциала. Необходимое и достаточное условие существования производной [1, гл. 2, §1, 4; 2, гл. 2, §5 – 7].

6. Аналитическая функция. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции [2, гл. 2, §13, 14; 1, гл. 2, §4, 5].

7. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Конформные отображения [2, гл. 2, §8 – 11; 1, гл. 2, §4, 5].

8. Элементарные функции. Линейная и дробно-линейная функции. Свойства дробно-линейного преобразования [1, гл. 3, §1, п.1 – 10; 2, гл. 3, §4 – 9].

9. Показательная функция и логарифм. Степень с произвольным комплексным показателем, функция Жуковского и им обратные функции. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Приложение аналитических функций к решению прикладных задач [1, гл. 3, §3; 2, гл. 3, §1 3; 10 21].

10. Интеграл от функции комплексной переменной и его свойства. Связь с криволинейными интегралами [1, гл. 4, §1, п. 1, 2; 2, гл. 5, §1 – 3].

11. Интегральная теорема Коши для простого и сложного контуров. Интеграл и первообразная. Выражение определенного интеграла через первообразную функцию (Формула Ньютона – Лейбница) [1, гл. 4, §2; 2, гл. 5, §4 – 10].

12. Интеграл и интегральная формула Коши. Ее следствия. Принцип максимума модуля. Интеграл типа Коши [1, гл. 4, §3, п. 3, 4, 7, гл. 5, §2, п. 5].
13. Обращение интегральной теоремы. Теорема Морера [1, гл. 4, §3, п. 5].
14. Ряды с комплексными членами. Абсолютно сходящиеся ряды. Степенные ряды. Круг сходимости и радиус сходимости [1, гл. 1, §5; 1, гл. 2, §3].
15. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Неравенство Коши для коэффициентов [1, гл. 5, §2, п. 1–3, 8, 9; 2, гл. 6, §2].
16. Ряд Лорана [2, гл. 7, §1, 2].
17. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Характер поведения функции в окрестности изолированной особой точки. Случай бесконечно удаленной точки. Связь между нулем и полюсом [1, гл. 6, §1, 2; 2, гл. 7, §3, 4, 6].
18. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Вычисление вычета [1, гл. 6, §2; 2, гл. 8, §1, 3].
19. Применение теории вычетов к вычислению интегралов. Примеры [1, гл. 7, §2; 3, гл. 5, §2, п. 73, 74].
20. Аналитическое продолжение функции. Понятие полной аналитической функции и римановой поверхности [1, гл. 2, §4, гл. 10, §1, 2; 2, гл. 9, §1–4, 6].
21. Понятие об общих свойствах конформных преобразований [1, гл. 12, §1, 2].
22. Приложение теории функций комплексной переменной. Краткий обзор развития теории функций комплексной переменной и важнейшие достижения отечественных ученых в этой области науки.

Глава 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОГРАММЕ

2. Компактификация комплексной плоскости состоит в присоединении к ней бесконечно удаленной точки. Плоскость с присоединенной бесконечно удаленной точкой (расширенная комплексная плоскость) при стереографическом проектировании соответствует полной числовой сфере. При соответствующем определении окрестности бесконечно удаленной точки стереографическое проектирование расширенной комплексной плоскости на замкнутую числовую сферу (сферу Римана) непрерывно в обе стороны в каждой точке. Расширенная комплексная плоскость, как и замкнутая числовая сфера, являются компактами. Подчеркнем, что в расширенной комплексной плоскости имеется одна бесконечно удаленная точка в отличие от числовой прямой, которая обычно дополняется двумя несобственными точками $+\infty, -\infty$, и от проективной плоскости, дополняемой целой бесконечно удаленной прямой.

Стремление $z \rightarrow \infty$ означает лишь то, что $|z| \rightarrow +\infty$ и не имеет значения, каким образом, в каком направлении z удаляется от начала координат. Стереографическая проекция показывает, что в окрестности бесконечно удаленной точки расширенная комплексная плоскость устроена так же, как и в окрестности любой конечной точки.

5. Обратит внимание на то, что для наличия производной $f'(z_0)$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно выполнение двух условий: а) дифференцируемости $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) как функций двух переменных, что означает наличие полного дифференциала у этих функций в точке (x_0, y_0) ; б) условия Даламбера – Эйлера (Коши – Римана).

Напомним, что из существования частных производных у функции $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) не вытекает ее дифференцируемость в этой точке.

7. Что касается конформных отображений, то сделаем следующее замечание: если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 , то условие $f'(z_0) \neq 0$ является не только достаточным для конформности отображения $w = f(z)$ в точке z_0 , но и необходимым.

8. 9. Рекомендуются решение задач (см. гл. 3).

Уяснить взаимоотношение понятий однозначности и однолиственности. Обратить внимание на области однолиственности рассматриваемых элементарных функций.

При поверхностном рассмотрении элементарных многозначных функций может создаться впечатление, что все многозначные аналитические функции суть функции обратные к однозначным аналитическим. Следующие примеры показывают, что это не так:

1) при $w(z) = z^{3/2}$ имеем $z(w) = w^{2/3}$;

2) если $P(z)$ – полином и $w = w(z)$ определяется как решение уравнения $P(z)P(w) = 1$, то функция $w = w(z)$ совпадает со своей обратной $z(w)$.

При построении конформных отображений конкретных областей нужно следить за тем, чтобы, во-первых, это отображение было взаимно-однозначным (т. е. однозначным и однолиственным) и непрерывным. Для этого нужно следить за тем, чтобы отображаемая (открытая) область попадала в область однолиственности применяемой функции и, во-вторых, когда применяется многолиственная функция, каким-либо условием выделить ее однозначную аналитическую ветвь.

10. См. гл. 4.

11. Интегральная теорема Коши – центральная тема курса. Почти все дальнейшие результаты основываются на этой теореме.

12. Интегральная формула Коши показывает, что значение аналитической функции во внутренних точках области полностью определяется ее значениями на границе области и позволяет производить соответствующие вычисления (см. гл. 4, п. 4.3).

13. Теорема Мореры вместе с интегральной теоремой Коши позволяет дать следующее определение аналитической функции: однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в области G , если $f(z)$ непрерывна в G и равен нулю интеграл вдоль любого жорданова спрямляемого контура, лежащего в G вместе со своей внутренностью (т. е. с ограниченной областью, для которой этот контур является границей).

14. Обратить внимание на то, что степенной ряд во всем (открытом) круге сходимости может сходиться неравномерно, в то время как на каждой замкнутой ограниченной подобласти круга сходимости он сходится равномерно.

Затруднения вызывает применение формулы Коши – Адамара для радиуса R сходимости степенного ряда $\sum c_n (z - a)^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{1/n}$$

в случае, когда на самом деле приходится вычислять верхний предел, поскольку не существует обычного предела, и в особенности, когда степенной ряд имеет пропуски, т. е. когда $c_n = 0$ для бесконечного числа индексов n . Соответствующий пример приведен в гл. 5.

15. В процессе разложения аналитической функции

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

в степенной ряд производится разложение в степенной ряд по степеням $(z - a)$ ядра Коши – функции $\frac{1}{\xi - z}$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}.$$

При этом z – фиксированная точка, лежащая строго внутри окружности $C: |\xi - a| = p, p > 0$, а ξ – произвольная точка окружности C . Этот ряд, а также ряд, полученный из него умножением каждого его члена на величину $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$, сходится равномерно по $\xi \in C$. Именно благодаря этому можно последний ряд проинтегрировать почленно (при фиксированном z).

На границе круга сходимости степенного ряда всегда имеется по крайней мере одна особая точка его суммы (заметим, что сам ряд может сходиться в этой точке).

16. 17. Обратит внимание на разницу в определении главной части ряда Лорана в случае конечной точки a и в случае бесконечно удаленной точки.

Классификация изолированных особых точек однозначного характера производится двумя эквивалентными способами:

- 1) по поведению функции вблизи рассматриваемой точки;
- 2) по виду лорановского разложения функции в проколотовой окрестности рассматриваемой точки (см. гл. 5).

18. Теория вычетов имеет многочисленные теоретические и практические приложения. В качестве практических приложений отметим вычисление интегралов – контурных и сводящихся к контурным (см. п. 6.2, примеры).

Глава 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексными числами называются выражения вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма), где x и y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, т.е. число, квадрат которого равен -1 . Число x называют действительной частью комплексного числа z , число y – его мнимой частью (обозначения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Если $y = 0$, то комплексное число $z = x + 0 \cdot i$ отождествляется с действительным числом x . Множество всех комплексных чисел обозначается \mathbb{C} .

Два комплексных числа z_1 и z_2 считаются равными, если

$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, а их произведением – число $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. В частности, если $z_1 = z_2 = i$, то из определения произведения получаем, что $i^2 = -1$.

Число $x - iy$ называется сопряженным числу $z = x + iy$ и обозначается \bar{z} .

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число $z = z_1 - z_2$, служащее решением уравнения $z_1 = z + z_2$, а частным z_1 / z_2 ($z_2 \neq 0$) – число z , которое является решением уравнения $z_1 = z z_2$. Разность и частное вычисляются по формулам

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой $M(x, y)$ или вектором \overline{OM} . Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством \mathbf{C} и координатной плоскостью, которую в данном случае называют комплексной плоскостью.

Длина вектора \overline{OM} называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$. Очевидно, что $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$. Угол φ , образованный вектором \overline{OM} (предполагается, что $z \neq 0$) с положительным направлением оси Ox , называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Он определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

где $\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое обычно условием $-\pi < \arg z \leq \pi$. Легко проверить, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y, & \text{если } x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ можно рассматривать как полярные координаты точки $M(x, y)$, тогда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и число $z \neq 0$ допускает представление в так называемой тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Воспользовавшись известной формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

и переписав предыдущее соотношение в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad (z \neq 0),$$

мы получим показательную форму комплексного числа. Легко проверяется справедливость следующих равенств:

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)},$$

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{формула Муавра}).$$

Примеры

1. Представить комплексное число $z = 3 - i + \frac{2i}{1+i}$ в алгебраической форме.

Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, получим

$$z = 3 - i + \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3 - i + \frac{2i(1-i)}{2} = 3 - i + i + 1 = 4,$$

т.е. $\operatorname{Re} z = 4$, $\operatorname{Im} z = 0$.

2. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $\left| \frac{2z}{1+z^2} \right| < 1$.

Согласно определению модуля комплексного числа имеем

$$\left| \frac{2z}{1+z^2} \right| = \frac{2|z|}{|1+z^2|} = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}}.$$

По условию получаем

$$\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}} < 1.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, возведем его в квадрат:

$$4(x^2+y^2) < (1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 \quad \text{или} \quad (1-x^2-y^2)^2 - 4y^2 > 0.$$

Тогда

$$(x^2 + (y+1)^2 - 2)(x^2 + (y-1)^2 - 2) > 0.$$

Искомое множество точек будет определяться двумя системами неравенств

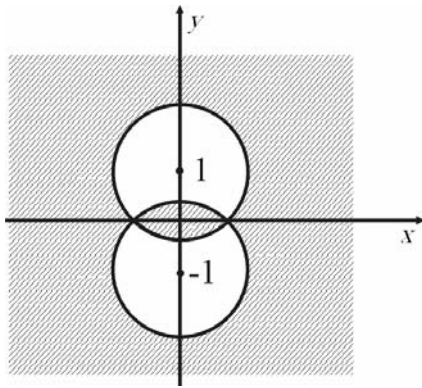


Рис. 1

и

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 > 2, \\ x^2 + (y-1)^2 > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 2, \\ x^2 + (y-1)^2 < 2, \end{cases}$$

решения которых изображены на рис. 1 (заштрихованная часть комплексной плоскости).

Глава 3. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

3.1. Дробно-линейная функция

Определение 1. Функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (1)$$

где a, b, c, d – комплексные числа, называется дробно-линейной.

Отображение, задаваемое этой функцией, называется дробно-линейным.

Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $w \neq const$. Функция (1) осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости \mathbf{Z} на расширенную комплексную плоскость w , так как производная

$$w' = \frac{az - bc}{(cz + d)^2} \neq 0, \quad \forall z \neq \infty.$$

Для $c \neq 0$ предполагаем, что $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \frac{a}{c}$, для $c = 0$ функция (1)

становится линейной, т. е. $w = az + b$ и $w(\infty) = \infty$. Функция

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0,$$

является обратной к функции (1). Она также является дробно-линейной и однозначной на расширенной комплексной плоскости, т. е. здесь функция (1) является однолистной.

Каждое дробно-линейное отображение может быть получено в результате последовательного выполнения трех отображений: линейного,

отображения $w = \frac{1}{z}$ и снова линейного отображения.

Дробно-линейные отображения переводят:

1) окружность или прямую в окружность или прямую (круговое свойство);

2) пару точек, симметричных относительно окружности, – в пару точек, симметричных образу этой окружности (свойство сохранения симметрии). Здесь "окружность", в частности, может быть прямой, если под последней понимать окружность бесконечного радиуса.

Существует единственное дробно-линейное отображение, которое три разных точки z_1, z_2, z_3 переводит соответственно в три разные точки w_1, w_2, w_3 . Это отображение задается формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (2)$$

Если одна из точек z_k или w_k ($k=1,2,3$) является бесконечно удаленной точкой, то в формуле (2) разности, в которые входит z_k или w_k , требуется заменить единицами.

Существует бесконечно много дробно-линейных отображений, которые заданную окружность γ отображают на заданную окружность Γ , причем область D , для которой γ является границей, отображается на одну из областей, для которой Γ является границей.

Для обеспечения единственности дробно-линейного отображения достаточно выполнение одного из условий:

1) заданная точка $z_0 \in D$ отображается в заданную точку $w_0 \in D'$, а любая кривая, выходящая из точки z_0 , поворачивается на заданный угол α ($w_0 = f(z_0)$, $\alpha = \arg(f'(z_0))$);

2) точки $z_0 \in D$ и $z_1 \in \gamma$ отображаются соответственно в заданные точки $w_0 \in D'$ и $w_1 \in \Gamma$.

Примеры

3. Найти образ окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0,$$

при отображении $w = \frac{1}{z}$.

► Решение. На основании кругового свойства дробно-линейного отображения окружность переходит в окружность. Для ее нахождения на заданной окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ выберем три точки, например: $z_1 = -1$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = -3 + 2i$, образами которых при отображении

$w = \frac{1}{z}$ будут точки $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1 - 2i}{5}$, $w_3 = \frac{-3 - 2i}{13}$. Точками w_1, w_2, w_3 однозначно определяется образ данной окружности, уравнение которой:

$$(u + 1)^2 + (v + 2)^2 = 4 \quad (w = u + iv). \quad (3)$$

Для отображения $w = \frac{1}{z}$ имеем

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Выразив отсюда $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ и подставив в уравнение заданной окружности, получим искомый образ (3).

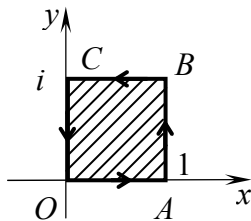
4. Найти образ области D при отображении $w = \frac{z}{z-1}$, где $D = \{z, 0 < \operatorname{Re}(z) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$.

► Решение. Выделим действительную и мнимую части функции w .
Имеем:

$$u = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

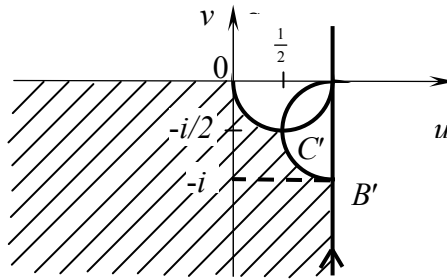
Будем искать образ границы области D (рис. 2).

Сторона OA : $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ отображается на отрицательную часть действительной оси ($v = 0, -\infty < u \leq 0$) (рис. 3).



Область D

Рис. 2



Образ области D

Рис. 3

Сторона AB : $x = 1, 0 < y \leq 1$, отображается в линию $u = 1, -\infty < v \leq -1$.

Сторона BC : $y = 1, 1 \geq x \geq 0$, отображается в линию, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$u = \frac{x(x-1) + 1}{(x-1)^2 + 1}, \quad v = -\frac{1}{(x-1)^2 + 1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Исключив параметр x , получим

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad 1 \geq u \geq \frac{1}{2}, \quad -1 \geq v \geq \frac{1}{2}.$$

Аналогично образ стороны CO определяется уравнением

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \geq u \geq 0, \quad -\frac{1}{2} \leq v \leq 0.$$

В соответствии с принципом соответствия границ образом квадрата будет заштрихованная область на рис. 2.

5. Найти дробно-линейное отображение, которое точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ оставляет неподвижными, а точку $z_3 = i$ переводит в точку $w_3 = 0$.

Найти образ полуплоскости $\text{Im}(z) > 0$ при данном отображении.

► Решение. По условию имеем три пары соответствующих точек

$$\begin{aligned} z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = i, \\ w_1 = 1, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = 0. \end{aligned}$$

Применяя формулу (2), получим искомое дробно-линейное отображение $w = \frac{iz + 1}{z + i}$.

Найдем теперь образ верхней полуплоскости, границей которой является действительная ось. Согласно круговому свойству действительная ось отображается в окружность. Чтобы найти ее, на действительной оси выберем три точки, например: $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$, образами которых будут точки $w_1 = 1, w_2 = -i, w_3 = -1$. Они лежат на окружности $|w| = 1$. По принципу соответствия границ получаем, что образом верхней полуплоскости будет область $D' = \{w, |w| < 1\}$.

6. Найти дробно-линейное отображение, которое круг $|z - 4i| < 2$ отображает на полуплоскость $v > u$ так, что $w(4i) = -4, w(2i) = 0$.

► Решение. Условие задачи определяет две пары соответствующих точек. Третью пару найдем, пользуясь свойством симметрии дробно-линейного отображения, согласно которому точки $z_1 = 4i$ и $z_3 = \infty$, симметричные относительно окружности $|z - 4i| = 2$, перейдут в точки $w_1 = -4$ и $w_3 = -4i$, симметричные относительно прямой $u = v$. Таким образом, найдена третья пара точек $z_3 = \infty$ и $w_3 = -4i$.

По формуле (2) найдем искомое отображение $w = \frac{-4iz - 8}{z - 2 - 4i}$.

3.2. Показательная и тригонометрические функции комплексного аргумента

Определение 2. Функция $f(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$ называется показательной и обозначается $\exp z$ или e^z .

Примеры

7. Доказать, что любая полоса шириной 2π , стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолиственности функции e^z .

► Доказательство. Пусть z_1 и z_2 – две различные точки комплексной плоскости. Очевидно, что при условии $e^{z_1} = e^{z_2}$ имеем $e^{z_1 - z_2} = 1$. Отсюда, так как $e^z = 1$ при $z = 2k\pi i, k \in \mathbf{Z}$, имеем

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \neq 0.$$

Таким образом, условие однолиственности нарушается для точек z_1 и z_2 , для которых $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, где k – любое целое число. Такому условию не удовлетворяет множество точек z комплексной плоскости, для которых $h < \text{Im}(z) < h + 2\pi$, где h – любое действительное число. Отсюда следует, что полоса шириной 2π , стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолиственности.

8. Доказать, что при отображении $w = e^z$:

a) образом прямой $y = a$ является луч, выходящий из начала координат под углом a к положительному направлению действительной оси;

b) образом прямой $x = d$ является окружность с центром в начале координат и радиусом e^d .

► Доказательство: a) действительно, так как $y = a$, то $z = x + ia$, $-\infty < x < +\infty$, тогда $w = e^{x+ia} = e^x(\cos(a) + i\sin(a))$, что означает, что $\arg(w) = a$, $|w| = e^x$ изменяется от 0 до ∞ , т.е. образом прямой $y = a$ является луч $\arg(w) = a$;

b) так как $x = d$, то $z = d + iy$, $-\infty < y < +\infty$, тогда $w = e^{d+iy} = e^d(\cos(y) + i\sin(y))$, т.е. $u = e^d \cos(y)$, $v = e^d \sin(y)$, а это – параметрическое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом e^d .

Тригонометрические и гиперболические функции комплексной переменной задаются формулами:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; & \text{tg}(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)}; \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; & \text{ctg}(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}; \\ \text{ch}(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}; & \text{th}(z) &= \frac{\text{sh}(z)}{\text{ch}(z)}; \\ \text{sh}(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; & \text{cth}(z) &= \frac{\text{ch}(z)}{\text{sh}(z)}. \end{aligned}$$

9. Доказать соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

- 1) $\cos(z) = \text{ch}(iz)$, $\text{ch}(z) = \cos(iz)$;
- 2) $\sin(z) = -i\text{sh}(iz)$, $\text{sh}(z) = -i\sin(iz)$;
- 3) $\text{tg}(z) = -i\text{th}(iz)$, $\text{th}(z) = -itg(iz)$;
- 4) $\text{ctg}(z) = i\text{cth}(iz)$, $\text{cth}(z) = ictg(iz)$.

10. Пусть $z = x + iy$. Доказать, что

$$1) \text{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\text{ch}(y), \quad \text{Im}(\sin(z)) = \cos(x)\text{sh}(y);$$

$$2) \operatorname{Re}(\operatorname{sh}(z)) = \operatorname{sh}(x)\cos(y), \quad \operatorname{Im}(\operatorname{sh}(z)) = \operatorname{ch}(x)\sin(y);$$

$$3) \operatorname{Re}(\cos(z)) = \cos(x)\operatorname{ch}(y), \quad \operatorname{Im}(\cos(z)) = -\sin(x)\operatorname{sh}(y);$$

$$4) \operatorname{Re}(\operatorname{ch}(z)) = \operatorname{ch}(x)\cos(y), \quad \operatorname{Im}(\operatorname{ch}(z)) = \operatorname{sh}(x)\sin(y).$$

11. Найти образы прямых $x = a$, $y = a$ при отображении $w = \sin(z)$.

► Решение. Для отображения $w = \sin(z)$ имеем $u = \sin(x)\operatorname{ch}(y)$, $v = \operatorname{sh}(y)\cos(x)$ (см. пример 8). При этом отображении прямая $x = a$ ($a \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$) переходит в кривую, параметрическое уравнение которой

$$u = \sin(a)\operatorname{ch}(y), \quad v = \cos(a)\operatorname{sh}(y), \quad -\infty < y < +\infty.$$

Исключая параметр y , получаем

$$\frac{u^2}{\sin^2(a)} - \frac{v^2}{\cos^2(a)} = 1 \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z), \quad (4)$$

причем координата u сохраняет знак, равный $\operatorname{sign}(\sin(a))$, а координата v пробегает всю числовую ось. Тогда образом прямой $x = a$ ($a \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$) является одна ветвь гиперболы (4) с полуосями $|\sin(a)|$ и $|\cos(a)|$ и с фокусами в точках ± 1 . Если $a = k\pi$, $k \in Z$, то прямая $x = a$ превращается в кривую, параметрическое уравнение которой $u = 0$, $v = (-1)^k \operatorname{sh}(y)$, $-\infty < y < +\infty$, т.е. в мнимую ось плоскости w . Если $a = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, то прямая $x = a$ переходит в кривую, параметрическое уравнение которой $v = 0$, $u = (-1)^k \operatorname{ch}(y)$, $-\infty < y < +\infty$, т.е. в луч $u \leq -1$, $v = 0$ при нечетном k и в луч $u \geq 1$, $v = 0$ при четном k .

Аналогично образом прямой $y = a$, $a \neq 0$ является эллипс

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2(a)} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2(a)} = 1$$

с полуосями $\operatorname{ch}(a)$ и $|\operatorname{sh}(a)|$ и с фокусами в точках ± 1 . Если $a = 0$, то образом действительной оси в плоскости z является отрезок $[-1, 1]$ действительной оси плоскости w .

12. Доказать, что: 1) функция $w = \sin(z)$ полосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2}$ отображает на всю плоскость w с разрезами по лучам $[1; +\infty[$ и $]-\infty, -1]$ действительной оси Ou ; 2) функция $w = \cos(z)$ полосу $0 < \operatorname{Re}(z) < \pi$ отображает на всю плоскость w с разрезами по лучам $[1; +\infty[$ и $]-\infty, -1]$ действительной оси Ou .

3.3. Логарифмы комплексных чисел. Степень с действительным показателем

Определение 3. Логарифмической функцией комплексного аргумента называется функция, обратная к показательной, т.е. определяемая уравнением

$$e^w = z, \quad z \neq 0,$$

и обозначаемая $w = \text{Ln}(z)$. Справедлива формула

$$\text{Ln}(z) = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in Z \quad (7).$$

Логарифмическая функция определена на всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$, она бесконечнозначна и разные ее значения отличаются на $2k\pi i$, $k \in Z$.

Каждое значение функции $\text{Ln}(z)$ называется логарифмом комплексного числа z .

Значение логарифма комплексного числа z , $z \neq 0$, которое соответствует $\ln(|z|) + i \arg(z)$, называется главным значением $\text{Ln}(z)$ и обозначается через $\ln(z)$:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Тогда формула (7) принимает вид

$$\text{Ln}(z) = \ln(z) + 2k\pi i, \quad k \in Z.$$

Определение 4. Однозначной непрерывной ветвью многозначной функции $f(z)$ в области D называется однозначная непрерывная функция $\varphi(z)$, значение которой в каждой точке $z \in D$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.

В области D , которая является комплексной плоскостью с разрезом вдоль луча, выходящего из начала координат под углом α_1 к действительной оси, существует бесчисленное множество разных однозначных ветвей функции $w = \text{Ln}(z)$. Каждая из этих ветвей отображает область D на одну из полос:

$$D_k = \{w, \alpha_1 + 2k\pi < \text{Im}(w) < \alpha_1 + 2(k+1)\pi\}, \quad k \in Z.$$

Для выделения однозначной ветви логарифмической функции $w = \text{Ln}(z)$ достаточно определить полосу D_k , на которую эта ветвь отображает область D . Для определения полосы D_k достаточно вычислить лишь значение логарифмической функции в какой-нибудь точке $z_0 \in D$.

Через $\text{Ln}_k(z)$ обозначим ту ветвь логарифмической функции $\text{Ln}(z)$, которая отображает область D на полосу D_k . Тогда

$$\text{Ln}_k(z) = \text{Ln}_0(z) + 2k\pi i, \quad k \in Z,$$

где $\text{Ln}_0(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}_0(z)$, $\alpha_1 < \text{Arg}_0(z) < \alpha_1 + 2\pi$.

Очевидно, что каждая ветвь $\text{Ln}_k(z)$ удовлетворяет теореме о производной обратной функции, по которой

$$(\operatorname{Ln}_k(z))' = \frac{1}{z}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad z \in D.$$

Отсюда, отображение, осуществляемое каждой ветвью логарифмической функции, является конформным для всех точек $z \in D$.

В связи с тем, что главное значение аргумента комплексного числа выбирается из промежутка $]-\pi, \pi]$, в формуле (5) берут $\alpha_1 = -\pi$. Тогда

$$D_k = \{w, (2k-1)\pi < \operatorname{Im}(w) < (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

а область D будет плоскостью с разрезом по лучу $]-\infty, 0]$.

Ветвь логарифмической функции, отображающая область D на полосу D_0 , является главной ветвью $\ln(z)$. Все остальные однозначные непрерывные ветви функции $w = \operatorname{Ln}(z)$ в этой области имеют вид

$$\operatorname{Ln}_k(z) = \ln(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Значение $\operatorname{Ln}(z)$, равное $\operatorname{Ln}_k(z)$, при однократном обходе точки z вокруг начала координат вдоль какой-нибудь окружности $|z| = r$ переходит в число $\operatorname{Ln}_{k+1}(z)$, так, что $\operatorname{Ln}(z)$ непрерывно изменяется и обход совершается против движения часовой стрелки, и в число $\operatorname{Ln}_{k-1}(z)$ – при обходе по часовой стрелке.

Точка, при обходе которой по какой-нибудь окружности достаточно малого радиуса многозначная функция, непрерывно изменяясь, переходит от одного значения к другому, называется точкой ветвления функции. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \operatorname{Ln}(z)$.

Примеры

13. Найти все значения логарифмов следующих чисел:

$$1; -1; e; 1+i; 2i; -i; \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \quad -\pi < \varphi \leq \pi; \frac{1+i}{i}; \frac{1+i}{1-i}.$$

14. Решить уравнения:

$$1) \ln(z+i)=1; \quad 2) \ln(i-z)=0; \quad 3) \ln\left(\frac{z+1}{i}\right)=1;$$

$$4) \operatorname{ch}(z)=i; \quad 5) \sin(z)=\pi i.$$

15. Найти образы плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси при отображениях ветвями логарифмической функции $w = \operatorname{Ln}(z)$ такими, что:

$$a) \text{ точка } z_0 = 1 \text{ переходит в точку } w_0 = 4\pi i;$$

$$b) \text{ точка } z_0 = -i \text{ переходит в точку } w_0 = \frac{3\pi i}{2};$$

$$c) \text{ точка } z_0 = i \text{ переходит в точку } w_0 = \frac{-7\pi i}{2}.$$

► Решение: а) полоса D_k , являющаяся образом плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси, определяется ветвью

$\text{Ln}_k(z)$ логарифмической функции, которую найдем из условия $\text{Ln}_k(1) = 4\pi i$. Имеем:

$$\text{Ln}_k(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Положив в этом равенстве $z = 1$, получим $4\pi i = 2k\pi i$, т.е. $k = 2$. Отсюда условием $\text{Ln}_k(1) = 4\pi i$ определяется ветвь $\text{Ln}_2(z) = \ln(z) + 4\pi i$, которая согласно формуле (5) указанную область отображает на полосу:

$$D_2 = \{w, 3\pi < \text{Im}(w) < 5\pi\}.$$

Пункты *b)* и *c)* рассмотреть самостоятельно.

16. Найти образ области D при отображении ветвью логарифмической функции $w = \text{Ln}(z)$, которая определяется ее значением w_0 в данной точке z_0 (при выборе ветви логарифмической функции комплексную плоскость разрезать по отрицательной части действительной оси):

$$a) D = \{z, 2 < |z| < 4, z \notin [-4, -2]\}, \quad z_0 = 1, \quad w_0 = -2\pi i;$$

$$b) D = \left\{z, |z| < 1, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\right\}, \quad z_0 = 1, \quad w_0 = 2\pi i;$$

$$c) D = \{z, |z| < 3, 0 < \arg(z) < \pi\}, \quad z_0 = i, \quad w_0 = \frac{\pi i}{2};$$

$$d) D = \left\{z, -\frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\right\}, \quad z_0 = i, \quad w_0 = \frac{5\pi i}{2}.$$

► Решение: *b)* ветвь, определяемая условием $\text{Ln}(1) = 2\pi i$, имеет вид

$$\text{Ln}_1(z) = \ln(|z|) + i \arg(z) + 2\pi i.$$

При этом отображении образом отрезка $\arg(z) = 0, 0 < |z| < 1$, является луч $v = 2\pi, -\infty < u < 0$, а образом отрезка $\arg(z) = \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1$, является

также луч $v = \frac{7\pi}{3}, -\infty < u < 0$. Образом дуги окружности $|z| = 1, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{3}$, является отрезок $u = 0, 2\pi < v < \frac{7\pi}{3}$. По принципу соответствия границ образом области D является полуполоса $-\infty < u < 0, 2\pi < v < \frac{7\pi}{3}$.

Пункты *a), c), d)* рассмотреть самостоятельно.

Определение 5. Функция $w = z^n, n = 2, 3, \dots$, называется целой степенной.

Она определена и однозначна на всей комплексной плоскости. Ее производная $w' = nz^{n-1}$ существует во всех точках плоскости, поэтому функция $w = z^n$ аналитична во всей комплексной плоскости. Очевидно, производная w' обращается в нуль лишь в точке $z = 0$. Таким образом, отображение $w = z^n$ конформно в каждой точке комплексной плоскости,

кроме точки $z = 0$. Положив $z = re^{i\varphi}$ и $w = \rho e^{i\psi}$, найдем $\rho = r^n$, $\psi = n\varphi$. Отсюда следует, что отображение $w = z^n$ каждый вектор $z \neq 0$ поворачивает на угол $(n-1)\arg(z)$ и растягивает его в $(n-1)$ раз. Это означает, что образом луча, выходящего из начала координат, является луч, также выходящий из начала координат; образом окружности $|z| = R$ является окружность $|z| = R^n$. Функция $w = z^n$ отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность любого угла с вершиной в точке $z = 0$ и раствора α , $0 < \alpha < \frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла с вершиной в точке $w = 0$ и раствора $n\alpha$, $0 < n\alpha < 2\pi$.

При $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ функция $w = z^n$ отображает область $D = \left\{ z, \varphi_0 < \arg(z) < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n} \right\}$ на плоскость с разрезом вдоль луча $\arg(w) = n\varphi_0$. Если $\varphi_0 = 0$, то область $D = \left\{ z, 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n} \right\}$ отображается на плоскость с разрезом вдоль положительной части действительной оси.

17. Определить, какие из данных функций осуществляют взаимно-однозначное отображение заданных областей:

$$1) w = z^2, \{z, \operatorname{Re}(z) > 0\}; \quad 3) w = z^4 + 1, \left\{ z, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$2) w = z^3, \{z, \operatorname{Re}(z) < 0\}; \quad 4) w = z^{10}, \left\{ z, \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\}.$$

18. Найти образы заданных множеств при отображениях $w = f(z)$:

$$1) \left\{ z, |z| = 2, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{8} \right\}, w = z^3;$$

$$2) \left\{ z, 1 < |z| < 2, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}, w = z^4;$$

$$3) \{z, \operatorname{Re}(z) = 2\}, w = z^2;$$

$$4) \left\{ z, |z| < 1, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}, w = z^2 + 1.$$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к функции $z = w^n$, определена на всей комплексной плоскости, n -значна при $z \neq 0$.

За область D возьмем комплексную плоскость с разрезом по лучу, выходящему из начала координат под углом φ_0 к положительному направлению действительной оси. В этой области существует n различных ветвей

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg}_k(z)}{n} + i \sin \frac{\text{Arg}_k(z)}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

где $2\pi k + \varphi_0 < \text{Arg}_k(z) < \varphi_0 + 2\pi(k+1)$, функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Каждая из ветвей взаимно-однозначно отображает область D на один из секторов

$$D_k = \left\{ w, \frac{2\pi}{n}k + \frac{\varphi_0}{n} < \text{Arg}(w) < \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+1) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для выделения ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, достаточно определить сектор D_k , на который эта ветвь отображает область D . При проведении разрезов в комплексной плоскости чаще всего берут $\varphi_0 = 0$ (разрез по положительному направлению оси Ox), либо $\varphi_0 = -\pi$ (разрез по отрицательной части действительной оси).

В результате однократного обхода вокруг начала координат вдоль какой-либо окружности $|z| = r$ значения $\sqrt[n]{z}$, непрерывно изменяясь, переходят от ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ к ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k+1}$ при обходе против часовой стрелки и к ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k-1}$ при обходе по часовой стрелке. После n -кратного обхода вокруг начала координат в одном направлении значение функции $\sqrt[n]{z}$, переходя с одной ветви к другой, придет к исходному.

Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Каждая ветвь функции $w = \sqrt[n]{z}$ удовлетворяет теореме о производной обратной функции, по которой

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)'_k = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)_k^{n-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad z \in D,$$

и поэтому осуществляет конформное отображение области D на одну из областей D_k .

19. В указанной области выделить однозначную ветвь заданной многозначной функции и найти, если необходимо, ее значение в точке:

a) в плоскости z с разрезом по положительной части действительной оси найти значение ветви функции $\sqrt[3]{z}$ в точке $z = 8i$ при условии $\sqrt[3]{-1} = -1$;

b) в плоскости z с разрезом по отрицательной части действительной оси найти значение ветви функции $\sqrt[4]{z}$ в точке $z = -i$ при условии $\sqrt[4]{1} = i$;

c) выделить ветвь функции $\sqrt[3]{z-1}$ в области $D = \{z, z \notin [1; +\infty)\}$ при условии $\sqrt[3]{-1} = -1$.

► Решение: а) по формуле (6)

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_k = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg}_k(z)}{3} + i \sin \frac{\text{Arg}_k(z)}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

где $2\pi k < \text{Arg}_k(z) < 2\pi(k+1)$, так как $\varphi_0 = 0$. Из условия $\sqrt[3]{-1} = -1$ имеем

$$\cos \frac{\text{Arg}_k(-1)}{3} + i \sin \frac{\text{Arg}_k(-1)}{3} = -1.$$

Отсюда $\cos \frac{\text{Arg}_k(-1)}{3} = -1$ и $\text{Arg}_k(-1) = 3\pi$.

Таким образом, $k = 1$ и искомая ветвь имеет вид

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg}_1(z)}{3} + i \sin \frac{\text{Arg}_1(z)}{3} \right), \quad 2\pi < \text{Arg}_1(z) < 4\pi,$$

а ее значением в точке $z = 8i$ будет

$$\left(\sqrt[3]{8i}\right)_1 = 2 \left(\cos \frac{\text{Arg}_1(8i)}{3} + i \sin \frac{\text{Arg}_1(8i)}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i.$$

Пункты *b*) и *c*) рассмотреть самостоятельно.

20. Найти образ:

a) верхней полуплоскости при отображении той ветвью функции $\sqrt[3]{z}$, которая точку i переводит в точку $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$;

b) нижней полуплоскости при отображении ветвью функции \sqrt{z} при условии $\sqrt{-1} = -i$ ($\varphi_0 = 0$);

c) области $\left\{ z, -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$ при отображении ветвью функции $\sqrt[3]{z}$ при условии $\sqrt[3]{1} = 1$ ($\varphi_0 = -\pi$).

► Решение: *a*) возьмем $\varphi_0 = 0$. По формуле (6)

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_k = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg}_k(z)}{3} + i \sin \frac{\text{Arg}_k(z)}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

из условия $\sqrt[3]{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ имеем $k = 1$. Тогда

$$D_1 = \left\{ w, \frac{2\pi}{3} < \text{Arg}(w) < \frac{4\pi}{3} \right\}$$

является образом плоскости z с разрезом по положительной части действительной оси при отображении ветвью $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$.

Итак, образом верхней полуплоскости при этом отображении будет область $\left\{ w, \frac{2\pi}{3} < \arg(w) < \pi \right\}$.

Пункты *b*) и *c*) рассмотреть самостоятельно.

Определение 6. Степенной функцией комплексного аргумента z , $z \neq 0$, с показателем α , $\alpha \in \mathbb{C}$, называется функция, определяемая равенством $z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln}(z)}$.

Если α не является рациональным числом, то функция z^α бесконечнозначна. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются ее точками ветвления.

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z},$$

и

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln(z) + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln(z)} e^{2k\alpha\pi i}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Беря все возможные значения k , получим все ветви этой функции в области $D = \{z, z \in]-\infty; 0]\}$.

Производная каждой ветви функции z^α определяется по формуле

$$(z^\alpha)'_k = \alpha(z^{\alpha-1})_k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

и существует во всех точках области D . Это означает, что каждая ветвь функции z^α аналитична во всех точках области D .

Определение 7. Показательная функция определяется равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln}(a)}, \quad a \neq 0.$$

Рассматривая все возможные значения $\operatorname{Ln}(a)$, получим все ветви функции a^z . Чтобы получить отдельную ветвь, достаточно фиксировать одно из значений $\operatorname{Ln}(a)$. Многозначная функция a^z не имеет точек разветвления и ее ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Все ветви показательной функции являются аналитическими на всей комплексной плоскости, и имеет место формула

$$(a^z)' = a^z \operatorname{Ln}(a).$$

Примеры

21. Найти:

a) найти модуль функции $w = z^a$ и выделить ее действительную и мнимую части;

b) значение выражения:

$$i^i, (1-i)^{1-i}, e^i, 1^{\pi i}, (-1)^{-i}, 1^{\sqrt{3}}, (1+i)^1, (-1)^{ie}.$$

22. Доказать:

a) выражение a^b принимает только одно значение, если b – целое, и конечное число значений, если b – рациональное;

d) при фиксированном z разные значения степенной функции $w = z^\alpha$, $\alpha = p + iq$:

1) лежат на окружностях, радиусы которых образуют бесконечную геометрическую прогрессию, а аргументы их значений – бесконечную арифметическую прогрессию, если $q \neq 0$, $p \neq 0$;

2) лежат на окружностях радиуса $|z|^p$, а аргументы этих значений образуют бесконечную арифметическую прогрессию, если $q = 0$, $p \neq 0$.

3.4. Функция Жуковского

Определение 8. Функция

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7)$$

называется функцией Жуковского.

Эта функция аналитична в точках $z \neq 0, \infty$, причем $w'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$

однолистка, в частности, в следующих областях:

- a) $|z| > 1$ – внешность единичного круга,
- b) $|z| < 1$ – единичный круг,
- c) $\text{Im}(z) > 0$ – верхняя полуплоскость,
- d) $\text{Im}(z) < 0$ – нижняя полуплоскость.

Положив в (7) $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получим

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi), \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi). \quad (8)$$

Отсюда следует, что образом окружности $z = pe^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $p > 0$ – фиксировано) является эллипс

$$u = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \cos(\varphi), \quad v = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) \sin(\varphi) \quad (9)$$

с полуосями $\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)$, $\frac{1}{2} \left| p - \frac{1}{p} \right|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$.

Исключая из уравнений (9) параметр φ при $p \neq 1$, получим уравнение эллипса в каноническом виде

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(p + \frac{1}{p} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(p - \frac{1}{p} \right)^2} = 1. \quad (10)$$

При замене p на $1/p$ ($p \neq 1$) эллипс (10) остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную.

Таким образом, окружности $|z| = p$, $p > 1$, ориентированные по часовой стрелке, переходят в эллипсы (10), ориентированные также по часовой стрелке. При отображении окружностей $|z| = p$, $0 < p < 1$, ориентация меняется на противоположную.

При $p = 1$ эллипс (9) вырождается в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды, т.е. окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды. Таким образом, функция Жуковского конформно отображает внешность (внутренность) единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 4).

Из (8) следует, что образом луча $z = re^{i\alpha}$, $0 < r < +\infty$, (α – фиксировано), является кривая

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\alpha), \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\alpha), \quad 0 < r < +\infty. \quad (11)$$

Исключая параметр r , при $\alpha \neq k\pi/2$ (k – целое), получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2(\alpha)} - \frac{v^2}{\sin^2(\alpha)} = 1. \quad (12)$$

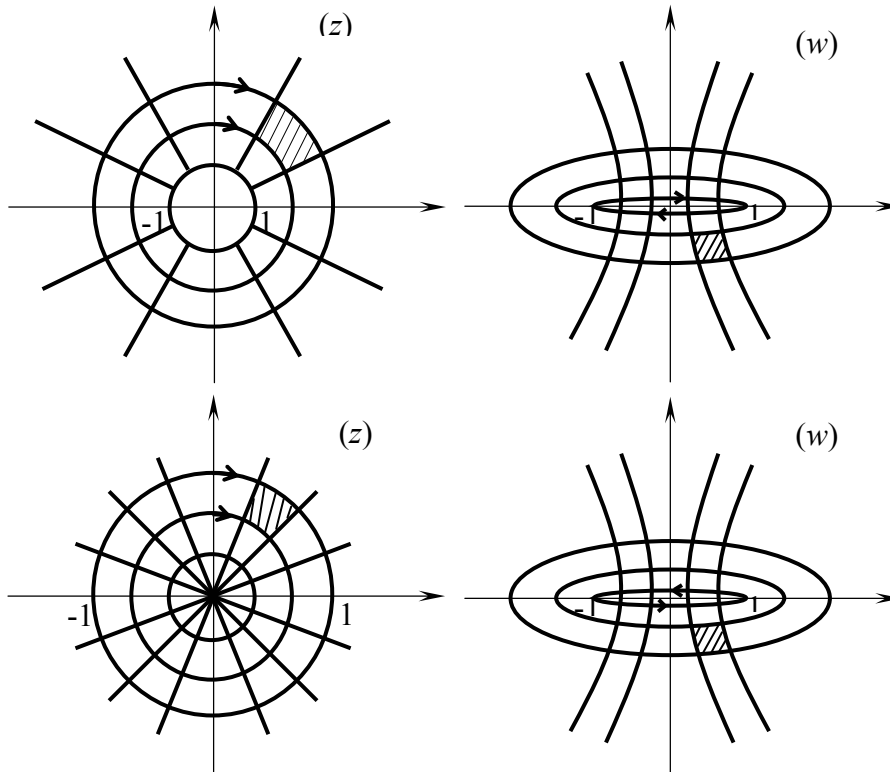


Рис. 4

Кривая (12) – гипербола с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с асимптотами $v = \pm u \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$. Если $0 < \alpha < \pi/2$, то кривая (11) является правой ветвью гиперболы (12), т.е. луч $r = re^{i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi/2$ переходит в правую ветвь гиперболы (ориентация показана на рис. 5), при $\pi/2 < \alpha < \pi$ – в левую ветвь (в (11) заменяем α на $\pi - \alpha$). При замене в (11) α на $-\alpha$ получаем ту же ветвь гиперболы, но с противоположной ориентацией. При $\alpha = 0$ (луч $\arg(z) = 0$) кривая (11) вырождается в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды, луч $\arg(z) = \pi$ переходит в луч $]-\infty, -1]$, проходимый дважды, лучи $\arg(z) = \pi/2$ и $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ переходят в мнимую ось $\operatorname{Re}(w) = 0$. Отсюда следует, что функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(z) > 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $]-\infty, -1]$ и $[1, +\infty[$ (аналогично нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(z) < 0$).

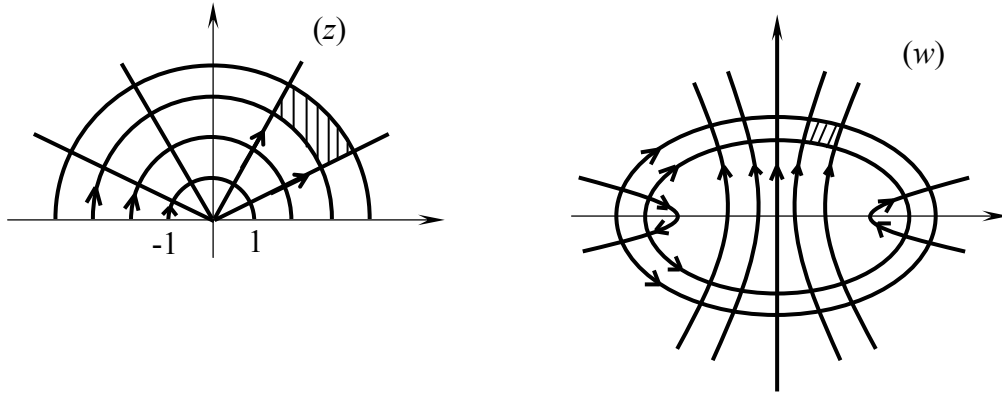


Рис. 5

Любой эллипс (10) пересекается с любой гиперболой (12) под прямым углом.

Примеры

23. Найти образы заданных областей при отображении $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$:

- | | |
|---|--|
| 1) $\{z, \operatorname{Im}(z) > 0, z > 1\}$; | 8) $\left\{z, \frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}\right\}$; |
| 2) $\{z, 1 < z < 2, \operatorname{Im}(z) > 0\}$; | 9) $\left\{z, z < 1, z \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$; |
| 3) $\{z, \alpha < \arg(z) < \pi - \alpha, 0 < \alpha < \pi/2\}$; | 10) $\{z, z < 1, z \notin [0, 1]\}$; |
| 4) $\{z, 0 < \arg(z) < \alpha, 0 < \alpha < \pi/2\}$; | 11) $\{z, \operatorname{Im}(z) < 0, z < 1\}$; |
| 5) $\{z, z > 1, z \notin [-2, -1] \cup [1, +\infty)\}$; | 12) $\{z, z > \rho > 1\}$. |
| 6) $\{z, z < 1, 0 < \arg(z) < \pi/2\}$; | |
| 7) $\{z, 0 < \arg(z) < \alpha, z > 1, 0 < \alpha < \pi/2\}$; | |

Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является обратной к функции Жуковского, она аналитична в плоскости z с выколотыми точками $z = \pm 1$, а в плоскости z с разрезом, соединяющим точки $z = \pm 1$, распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(\infty) = \infty$, $f_2(\infty) = 0$. Из свойств функции Жуковского следует, что функция $w = f_1(z)$ конформно отображает плоскость z с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внешность единичного круга, а функция $w = f_2(z)$ – на круг $|w| < 1$.

Примеры

24. Найти образы области D :

- 1) при отображениях ветвями $w = f_1(z)$ и $w = f_2(z)$, где $f_1(0) = i$, $f_2(0) = -i$ и D – плоскость Z с разрезами по лучам $]-\infty, -1]$ и $[1, +\infty[$;

$$2) D = \{z, \operatorname{Im}(z) > 0\}, w = z + \sqrt{z^2 - 1}, w(0) = i;$$

$$3) D = \{z, \operatorname{Im}(z) > 0\}, w = z + \sqrt{z^2 - 1}, w(0) = -i;$$

$$4) D = \{z, \operatorname{Im}(z) > 0\}, w = z + \sqrt{z^2 - 1}, w(+i\infty) = 0;$$

$$5) D = \left\{ z, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} < 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - 1} > 1 \right\} \quad (a > b > 1), \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

$w(z) > 1$ при $b < z < a$;

$$6) D = \left\{ z, \frac{x^2}{\cos^2(\alpha)} + \frac{y^2}{\sin^2(\alpha)} > 1, x > 0, y > 0 \right\}, \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

$w(+\infty) = 0, (0 < \alpha < \pi/2)$;

$$7) D = \{z, z \notin [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}, w = z + \sqrt{z^2 - 1}, w(0) = i.$$

3.5. Конформные отображения, определяемые комбинациями основных элементарных функций

Основные задачи теории конформных отображений имеют следующий вид: даны области D и G , требуется найти функцию $f(z)$, осуществляющую конформное отображение области D на область G .

Один из методов поиска функции $f(z)$, если такую функцию можно найти, основан на подборе надлежащим образом элементарных функций, рассмотренных ранее.

Примеры

25. Найти конформное отображение области D на область G , если:

$$1) D = \{z, |z| > 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad G = \{w, \operatorname{Im}(w) > 0\};$$

$$2) D = \{z, |z| < R, 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\alpha, 0 < \alpha < 2\}, \quad G = \{w, \operatorname{Im}(w) > 0\};$$

$$3) D = \{z, |z| < 1, |z - i| < 1\}, \quad G = \{w, \operatorname{Im}(w) > 0\};$$

$$4) D = \{z, 0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\alpha, 0 < \alpha < \pi, z \notin [e^{i\alpha}; +\infty e^{i\alpha}]\}, G = \{w, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\};$$

$$5) D = \left\{ z, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad G = \{w, w \notin [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\};$$

$$6) D = \{z, |z| < 1, z \notin [0, 1]\}, \quad G = \{w, |w| < 1\};$$

$$7) D = \{z, |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad G = \{w, \operatorname{Im}(w) > 0\};$$

$$8) D = \{z, |z - 1| < 1, |z + i| < 1\}, \quad G = \{w, \operatorname{Re}(w) > 0\};$$

$$9) D = \{z, \operatorname{Re}(z) > 0, |z - 1| > 1\}, \quad G = \{w, \operatorname{Im}(w) > 0\};$$

$$10) D = \{z, |z-1| > 1, |z+1| > 1, \text{Im}(z) > 0\}, \quad G = \{w, |w| > 1, \text{Re}(w) > 0\};$$

$$11) D = \{z, |z-2| > 2, |z-4| < 4\}, \quad G = \{w, 0 < \text{Im}(w) < \pi\}.$$

► Решение: 1) область D ограничена полуокружностью $|z|=1$, $\text{Im}(z) > 0$ и лучами $]-\infty; -1]$ и $[1; +\infty[$, которые пересекаются с полуокружностью в точках $z = \pm 1$ под прямым углом (рис 6, а). Дробно-линейная функция

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1} \quad (13)$$

точку $z = -1$ переводит в точку $w_1 = \infty$, а точку $z = 1$ – в точку $w_1 = 0$.

Пользуясь свойством сохранения углов при конформном отображении, получим, что область D отображением (13) переводится на внутренность прямого угла с вершиной в точке $w = 0$. Одна из сторон этого угла – положительная часть мнимой оси (образ полуокружности), другая – положительная часть действительной оси (образы лучей $]-\infty; -1]$ и $[1; +\infty[$) (рис 6, б).

Функция $w = (w_1)^2$ переводит квадрант на верхнюю полуплоскость, т.е. функция $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ осуществляет отображение области D на верхнюю полуплоскость (рис. 6, в);

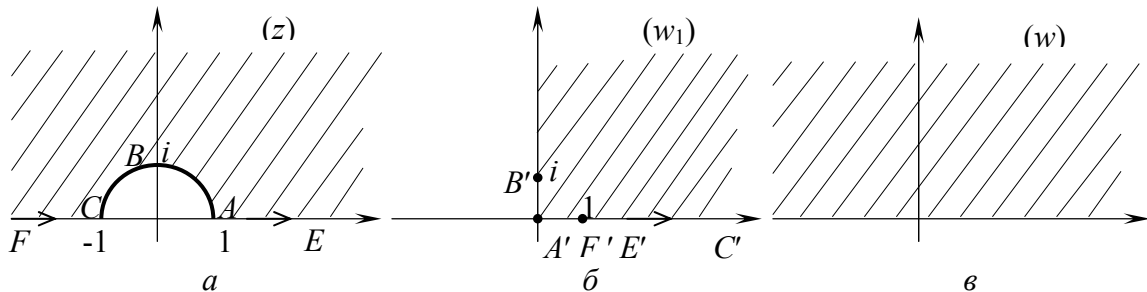


Рис. 6

2) с помощью степенной функции $w_1 = z^{1/\alpha}$ данный сектор (рис. 7, а) переводится на верхний полукруг радиуса $R^{1/\alpha}$ (рис. 7, б). Легко видеть, что дробно-линейная функция $w_2 = -\frac{w_1 + R^{1/\alpha}}{w_1 - R^{1/\alpha}}$ внутренность полукруга $|w_1| < R^{1/\alpha}$, $\text{Im}(w_1) > 0$ (рис. 7, б), отображает на первый квадрант плоскости w_2 (рис. 7, в).

Отображением $w = (w_2)^2$ этот квадрант переводится на верхнюю полуплоскость (рис. 7, з).

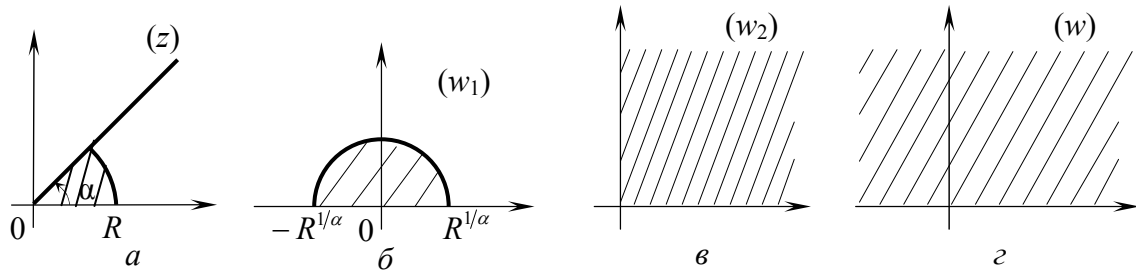


Рис. 7

Итак, искомое отображение имеет вид $w = \left(\frac{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}} \right)^2$;

4) область D является внутренностью угла с разрезом по лучу $[e^{i\alpha}; +\infty e^{i\alpha}]$ (рис. 8, а). Отображение $w_1 = z^{\pi/\alpha}$ переводит область D на всю комплексную плоскость с разрезом по лучам $]-\infty, -1]$ и $[0, +\infty[$ (рис. 8, б), а отображение $w_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_1 + 1}}$, $w_2(\infty) = 1$ переводит эту область на верхнюю полуплоскость (рис 8, в). Тогда отображение $w = \frac{1}{\pi} \ln(w_2)$ переводит верхнюю полуплоскость плоскости W_2 на полосу $0 < \text{Im}(w) < 1$ (рис 8, г). То есть функция $w = \frac{1}{\pi} \ln \left(1 + z^{\frac{\pi}{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}}$ осуществляет искомое отображение (рис. 8, а и г).

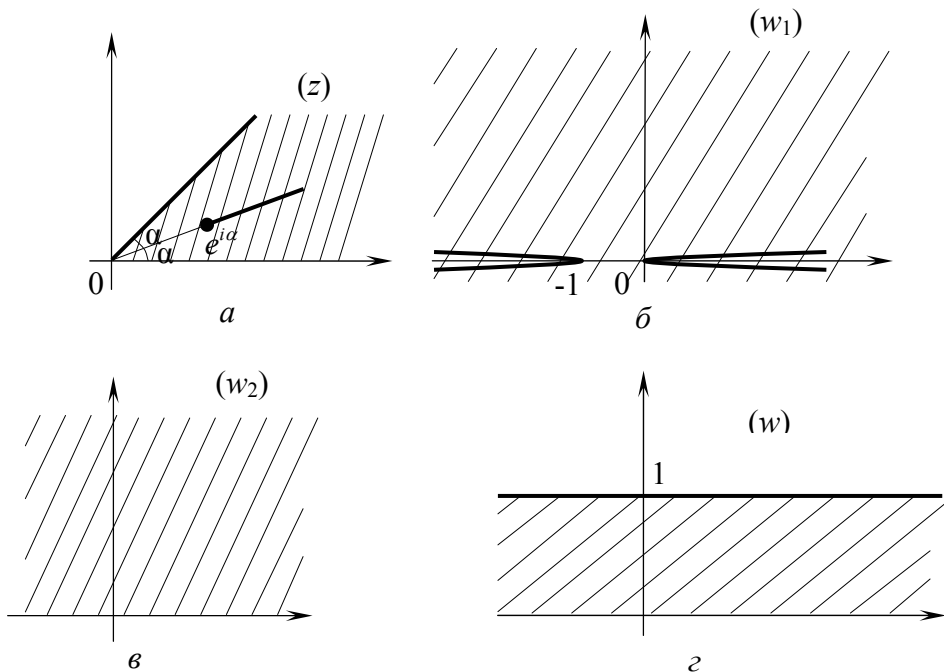


Рис. 8

Глава 4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Понятие интеграла от функции комплексной переменной

Пусть $f(\xi)$ – непрерывная функция в области D комплексной плоскости; L – кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D с началом в точке z_0 и концом в точке z .

Разобьем кривую L произвольным образом на n элементарных частей $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ точками $z_0, z_1, \dots, z_n = z$. Составим сумму $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k$, где $\xi_k \in \gamma_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Пусть l_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ – длина дуги кривой γ_k , а $\lambda = \max_k \{l_k\}$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k = \int_L f(\xi) d\xi$$

называется интегралом от функции $f(\xi)$ по кривой L .

Если кривая L задается уравнением $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то вычисление интеграла от функции $f(z)$ по кривой L (в порядке возрастания параметра t) сводится к вычислению определенного интеграла по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (14)$$

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то интеграл (19) сводится к вычислению криволинейных интегралов

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (15)$$

Примеры

26. Вычислить $\int_L |z| \bar{z} dz$, где L – часть окружности $|z|=1$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$, выбрав за начало L точку $z=1$.

► Решение. Запишем уравнение кривой L в виде $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Тогда $\bar{z} = e^{-it}$, $dz = ie^{it} dt$. Используя формулу (14), имеем:

$$\int_L |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} dt = \pi i.$$

27. Вычислить $\int_L (z^2 + z\bar{z}) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $z=0$ – начало кривой.

► Решение. Выпишем действительную и мнимую части подинтегральной функции:

$$z^2 + z\bar{z} = (x + iy)^2 + (x + iy)(x - iy) = 2x^2 + i2xy \Rightarrow \begin{cases} u = 2x^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой (15), имеем ($y = x^2$, $dy = 2xdx$)

$$\begin{aligned} \int_L (z^2 + z\bar{z}) dz &= \int_L 2x^2 dx - 2xy dy + i \int_L 2xy dx + 2x^2 dy = \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 2x^4) dx + 6i \int_0^1 x^3 dx = -\frac{2}{15} + \frac{3i}{2}. \end{aligned}$$

28. Вычислить $\int_L \frac{dz}{|\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Re}(z)|}$, где L – квадрат с вершинами в точках $1, i, -1, -i$ (рис. 9).

► Решение. Поскольку на сторонах квадрата $ABCD$ выполняется равенство $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = |x| + |y| = 1$, получаем

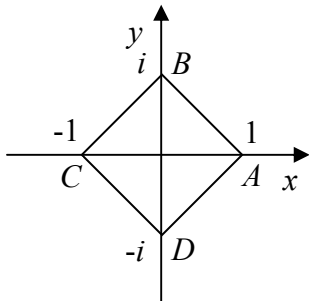


Рис. 9

$$\int_L \frac{dz}{|\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Re}(z)|} = \int_L dz.$$

Подсчитаем интеграл вдоль отрезка AB : $y=1-x$, $0 \leq x \leq 1$, $dy = -dx$, $Dz = dx + idy = (1-i)dx$, откуда

$$\int_{AB} dz = \int_1^0 (1-x) dx = -1 + i.$$

Аналогично,

$$\int_{BC} dz = -1 - i, \quad \int_{CD} dz = 1 - i, \quad \int_{DA} dz = 1 + i.$$

Окончательно,

$$\int_L \frac{dz}{|\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Re}(z)|} = 0.$$

4.2. Интегральная теорема Коши

ТЕОРЕМА (Интегральная теорема Коши). Если функция $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D , то интеграл от нее по произвольному замкнутому жордановому кусочно-гладкому контуру L , целиком лежащему в области D , равен нулю:

$$\int_L f(z) dz = 0. \quad (16)$$

Из этой теоремы вытекает: а) если $f(z)$ аналитична в области D , то интеграл не зависит от пути интегрирования, т.е. если $\gamma_1 \subset D$ и $\gamma_2 \subset D$ – две кривые, имеющие общие начало и конец, то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz;$$

б) если функции $f(z)$ и $g(z)$ вместе со своими производными пер-

вого порядка аналитические в односвязной области D , то справедлива формула

$$\int_{z_0}^z f(\xi)g'(\xi)d\xi = f(\xi)g(\xi) \Big|_{z_0}^z - \int_{z_0}^z f'(\xi)g(\xi)d\xi; \quad z_0, z \in D;$$

Примеры

29. Определить, когда для интеграла $\int_L \frac{dz}{z^2 - 4}$ можно применить интегральную теорему Коши, если L :

$$a) |z| = \frac{1}{2}; \quad b) |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}; \quad c) |z - 1| = 4; \quad d) |z| = 3.$$

► Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$ имеет особенности в точках $z = \pm 2, \infty$. Следовательно,

a) круг $|z| \leq \frac{1}{2}$ полностью входит в область аналитичности $f(z)$ и (16) имеет место;

b) рассуждая аналогично п. a), имеем (16);

c) в круге с центром $z = 1$ и радиуса 4 функция $f(z)$ имеет особенности и не является аналитической, следовательно, теорема Коши не применима;

d) рассуждая аналогично п. c), получаем, что теорема Коши также не применима.

30. Доказать, что $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

► Решение. Функция $f(z) = e^{-z^2}$ — аналитична на всей комплексной плоскости. Проинтегрируем $f(z)$ по контуру прямоугольника $|x| \leq R, 0 \leq y \leq b$ (рис. 10). Из (16) следует, что

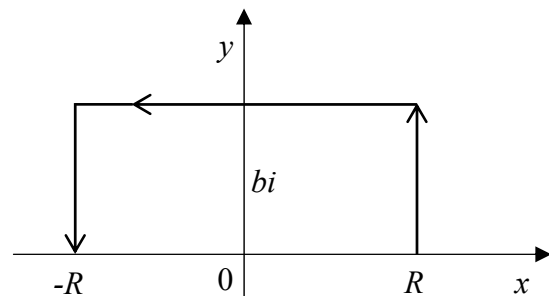


Рис. 10

$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(R+iy)^2} idy + \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} idy = \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-R^2+y^2} e^{-2iRy} dy + \int_R^{-R} e^{-x^2+b^2} e^{-2bix} dx + \end{aligned}$$

$$+ i \int_b^0 e^{-R^2 + y^2} e^{2Riy} dy.$$

Если объединить второй и четвертый интегралы, разбить третий интеграл на два и воспользоваться формулами Эйлера

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

то полученную сумму интегралов можно будет записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-R^2 + y^2} \sin(2Ry) dy + \int_R^0 e^{-x^2 + b^2} e^{-2bix} dx + \\ & + i \int_0^{-R} e^{-x^2 + b^2} e^{-2bix} dx = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-R^2 + y^2} \sin(2Ry) dy - \\ & - 2 \int_0^R e^{-x^2 + b^2} \cos(2bx) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\text{При } R \rightarrow \infty \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-R^2 + y^2} \sin(2Ry) dy = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2 + b^2} \cos(2bx) dx = 2e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx.$$

Зная, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (интеграл Эйлера – Пуассона), оконча-

тельно имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

4.3. Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в ограниченной замкнутой односвязной области \bar{D} с кусочно-гладкой жордановой границей L . Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (17)$$

Формула (17) называется интегральной формулой Коши. Для производной n -го порядка справедливо обобщение (17):

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (18)$$

Примеры

31. Вычислить $\int_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz$, где

a) $L = \{z, |z-1|=1\}$; b) $L = \{z, |z| = \frac{1}{2}\}$; c) $L = \{z, |z-1+i| = \sqrt{2}\}$.

► Решение: a) перепишем интеграл в виде

$$\int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{ze^z}{z^2+1}}{z-1} dz,$$

функция $f(z) = \frac{ze^z}{z^2+1}$ — аналитическая в области $|z-1| < 1$, а точка

$z_0 = 1 \in \{|z-1| < 1\}$, тогда из (25) имеем

$$\int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz = 2\pi i \left. \frac{ze^z}{z^2+1} \right|_{z=1} = \pi e i;$$

b) в области $|z| = \frac{1}{2}$ подынтегральная функция $\frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}$ —

аналитическая, поэтому из интегральной теоремы Коши (16) имеем

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz = 0;$$

c) в области $|z-1-i| < \sqrt{2}$ лежат две точки, в которых знаменатель обращается в ноль: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, поэтому воспользоваться непосредственно формулой (17) невозможно. Разложим функцию на сумму простых дробей

$$\frac{z}{(z^2+1)(z-1)} = -\frac{z-1}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2(z-1)}.$$

Тогда, применяя (25) к каждому из интегралов, имеем

$$\int_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz = -\frac{1}{2} \int_L \frac{(z-1)e^z}{z^2+1} dz + \frac{1}{2} \int_L \frac{e^z}{z-1} dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_L \frac{(z-i)e^z}{z+i} dz + \frac{1}{2} \int_L \frac{e^z}{z-1} dz \stackrel{(17)}{=} =$$

$$= -\pi i \left. \frac{(z-1)e^z}{z+i} \right|_{z=i} + \pi i e^z \Big|_{z=1} = \frac{\pi}{2} (1-i)e^i + \pi e i.$$

32. Доказать, что $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ ($a > 1$).

► Решение. Заменой $z = e^{i\varphi}$ сведем интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)}$ к интегралу по контуру от функции комплексной переменной. Так как $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, воспользовавшись формулой $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{t\varphi} + e^{-t\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$(z^2 + 2az + 1) = (z + a + \sqrt{a^2 - 1})(z + a - \sqrt{a^2 - 1}) = (z - z_1)(z - z_2).$$

Точка $z_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \in \{|z| < 1\}$, точка $z_1 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \in \{|z| > 1\}$, таким образом, функция $(z + a + \sqrt{a^2 - 1})^{-1}$ — аналитическая в $\{|z| < 1\}$, и из формулы (17) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \\ & = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z + a + \sqrt{a^2 - 1}} dz = \frac{2}{i} \frac{2\pi i}{z + a + \sqrt{a^2 - 1}} \Big|_{z = -a + \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

33. Вычислить $\int_{|z|=3} \frac{z \sin(z)}{(z-2)^3} dz$.

► Решение. Воспользовавшись (17), имеем

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{z \sin(z)}{(z-2)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} (z \cdot \sin(z))'' \Big|_{z=2} = \pi i (2 \cos(z) - z \sin(z)) \Big|_{z=2} = \\ &= 2\pi i (\cos(2) - \sin(2)). \end{aligned}$$

34. Вычислить $\int_0^{2\pi} \sin^6(x) dx$.

► Решение. Сделав замену $z = e^{ix}$ и используя формулу

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin^6(x) dx = -\frac{1}{64i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^6}{z^7} dz = -\frac{2\pi}{64 \cdot 6!} \left[(z^2 - 1)^6 \right]^{(6)} \Big|_{z=0} = \frac{5\pi}{8}.$$

Глава 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

5.1. Понятие степенного ряда

Определение 9. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (18)$$

где $z_0, c_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots$ – фиксированные числа.

Определение 10. Радиусом сходимости степенного ряда называется число $R, 0 < R < +\infty$, обладающее тем свойством, что при любом z , для которого $|z - z_0| < R$, этот ряд сходится, а при любом z , для которого $|z - z_0| > R$, ряд расходится. Круг $\{z, |z - z_0| < R\}$, где R – радиус сходимости степенного ряда, называется его кругом сходимости. Если ряд сходится только при $z = z_0$, то по определению полагают $R = 0$, если же ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, то считают что $R = +\infty$. Для радиуса сходимости степенного ряда (18) справедлива формула Коши – Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (19)$$

Примеры

35. Найти радиусы сходимости рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n;$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!};$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3};$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n;$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$

► Решение: 1) по формуле (19) имеем $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,

для вычисления последнего предела воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n \cdot e^{-n+\theta_n/12n}, \quad \theta_n \in (0,1),$$

тогда

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} n^n \cdot e^{-n+\theta_n/12n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1-\theta_n/12n}}{2n\sqrt{2\pi n}} = e,$$

откуда $R = e^{-1}$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$ – степенной ряд, у которого многие коэффициенты

равны нулю. Прежде, чем воспользоваться формулой Коши – Адамара, за-

пишем выражения коэффициентов c_k этого ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ через номер

коэффициента c_k (здесь c_k – коэффициент при k -й степени z):

$$c_k = \begin{cases} 3^n, & k = n^3, \quad n = 0, 1, \dots; \\ 0, & k \neq n^3. \end{cases}$$

Так как требуется найти верхний предел неотрицательной последовательности, можно не рассматривать ее нулевые члены. Поэтому

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{|c_{n^3}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n)^{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

5.2. Ряд Тейлора

Пусть $f(z)$ однозначна и аналитична в области D , точка $z_0 \in D$ и R – кратчайшее расстояние от точки z_0 до границы области D . Тогда в

круге $|z - z_0| < R$ функция разлагается в степенной ряд по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (20)$$

где коэффициент c_n вычисляется по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{или} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad r < R, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Определение 11. Степенной ряд (20) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Как правило, прямое вычисление коэффициентов рядов Тейлора через вышеприведенные формулы затруднительно и приходится прибегать к различным искусственным приемам. При этом важную роль играет теорема единственности разложения функций в степенной ряд: если функция f представима в круге $|z - z_0| < R$ как сумма степенного ряда, то коэффициенты этого ряда определяются однозначно.

Приведем разложение некоторых элементарных функций в точке $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < +\infty), \quad (21)$$

$$\sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty), \quad (22)$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty), \quad (23)$$

$$\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty), \quad (24)$$

$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty), \quad (25)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \quad (|z| < 1) \quad (26)$$

(здесь $\ln(z)$ – главная ветвь логарифма),

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n z^n \quad (|z| < 1), \quad (27)$$

$$C_\alpha^n = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{если } n=1,2,\dots, \\ 1, & \text{если } n=0 \end{cases}$$

(здесь z^α – главная ветвь степенной функции).

В частности из формулы (27) имеем

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1). \quad (28)$$

Приведем примеры разложения функций в ряды с использованием формул (21) – (28).

Примеры

36. Разложить в степенной ряд функции:

1) $\frac{1}{z^2 + 1}, z_0 = 0.$

► Решение. Из формулы (28) для $|z| < 1$ имеем

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

2) $\frac{1}{(1-z)^2}, z_0 = 0.$

► Решение. Из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1-z} \right] = \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (z^n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

3) $\frac{z}{1-z+z^2}, z_0 = 0.$

► Решение. Записав данную функцию в виде

$$\frac{z}{1-z+z^2} = \frac{z(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{z(z+1)}{1+z^3}$$

и воспользовавшись формулой (28), для всех $|z| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{z(z+1)}{1+z^3} &= z(z+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n} = z(z+1)(1-z^3+z^6-z^9+\dots \\ &+ (-1)z^{3n}+\dots) = z+z^2-z^4-z^5+z^7+z^8-z^{10}-z^{11}+\dots \\ &+ (-1)^n z^{3n+1} + (-1)^n z^{3n+2} + \dots \end{aligned}$$

4) $\frac{z-1}{2z^2+5z+2}, z_0 = -1.$

► Решение. Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, разложим функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2} = \frac{z-1}{(z+2)(2z+1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{2z+1} = \frac{A(2z+1)+B(z+1)}{(z+1)(2z+1)},$$

$$\left. \begin{aligned} z^1 : 2A+B &= 1 \\ z^0 : A+2B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1, \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Получаем

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{2z+1}.$$

Применяя к каждой из дробей формулу (28), получим

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-(-(z+1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$$

и

$$\frac{1}{2z+1} = \frac{1}{2(z+1)-1} = -\frac{1}{1-2(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z+1)^n, \quad |z+1| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{2z^2+5z+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z+1)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + (-1)^n) (z+1)^n \end{aligned}$$

для всех $|z+1| < \frac{1}{2}$.

$$5) \frac{z-i}{z+i}, \quad z_0 = i.$$

► Решение. Для всех точек z окрестности точки $z_0 = i$ радиуса $|z-i| < 2$:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{z-i}{(z-i)+2i} = \frac{z-i}{2i(1-(-\frac{z-i}{2i}))} = \frac{z-i}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n;$$

так как $\left|\frac{z-i}{2}\right| < 1$, то имеем

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2}\right)^{n+1} i^{n+1} \frac{1}{(-1)^{n+1}} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{(z-i)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

$$6) \cos(z), \quad z_0 = \frac{\pi}{4}.$$

► Решение. Пользуясь тригонометрическими формулами, получаем

$$\cos(z) = \cos\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Из разложений (22), (23):

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Окончательно имеем

$$\cos(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n+1} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+2} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots \right], \quad z \in \mathbf{C}.$$

7) e^z , $z_0 = 3$.

► Решение. Из разложения (21) имеем

$$e^z = e^{(z-3)+3} = e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n!}.$$

8) $\sin^4(z) + \cos^4(z)$, $z_0 = 0$.

► Решение. Пользуясь тождеством

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4z)$$

и формулой (28), получаем

$$\sin^4(z) + \cos^4(z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \cdot 4^{2n} = \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(4z)^2}{2!} + \frac{(4z)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(4z)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \cdot 4^{2n-1}.$$

9) $\operatorname{ch}(z)\cos(z)$, $z_0 = 0$.

► Решение. Для разложения функции в степенной ряд преобразуем ее, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{ch}(z) \cdot \cos(z) = \frac{1}{4}(e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z} + e^{-(1+i)z} + e^{-(1-i)z}).$$

Замечая, что

$$1+i = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right] = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i}, \quad -1-i = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4} i}, \quad -1+i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i},$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z) \cos(z) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\sqrt{2})^n \left[e^{\frac{\pi n}{4} i} + e^{-\frac{\pi n}{4} i} + e^{\frac{3\pi n}{4} i} + e^{-\frac{3\pi n}{4} i} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \frac{z^n}{n!} \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Кроме того:

$$n=0 \quad \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{4}\right) = 2,$$

$$n=1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$n=2 \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 0 = 0,$$

$$n=3 \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$n=4 \quad \cos \pi + \cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) = -1 - 1 = -2,$$

$$\text{т.е. } \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не кратно } 4; \\ (-1)^{n/4} \cdot 2, & \text{если } n \text{ кратно } 4. \end{cases}$$

Отсюда окончательно имеем

$$\operatorname{ch}(z) \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{2k} \frac{z^{4k}}{(4k)!}.$$

$$10) \quad z e^{2z}, \quad z_0 = 1.$$

► Решение. Используя формулу (21), получаем

$$z e^{2z} = [(z-1) + 1] e^{2(z-1)+2} = [(z-1) + 1] e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^k =$$

$$\begin{aligned}
&= e^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^k \right] = \\
&= e^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (z-1)^{k+1} + 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} (z-1)^{k+1} \right] = \\
&= e^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2^k}{k!} + \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \right] (z-1)^{k+1} \right] = \\
&= e^2 \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} (k+3) (z-1)^{k+1} \right].
\end{aligned}$$

При разложении в ряд некоторых функций, а именно функций, после дифференцирования которых получается рациональная дробь, целесообразно использовать теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся рядов (функций вида $\ln[\varphi(z)]$, $\arcsin[\varphi(z)]$, $\operatorname{arctg}[\varphi(z)]$, ...).

Пример

37. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $\ln(z + \sqrt{1+z^2})$.

► Решение. Продифференцируем функцию

$$F(z) = \left[\ln(z + \sqrt{1+z^2}) \right]' = \frac{1}{z + \sqrt{1+z^2}} \cdot \left[1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Из формулы (27) имеем

$$\begin{aligned}
(1+t)^{1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{-1/2}^k t^k \quad (|t| < 1), \\
c_{-1/2}^k &= \begin{cases} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{k! 2^k}, & k = 1, 2, \dots; \\ 1, & k = 0; \end{cases} \\
(1+t)^{-1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{k! 2^k} t^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} t^k.
\end{aligned}$$

Тогда

$$(1+z^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} z^{2k} \quad (|z| < 1).$$

Проинтегрировав почленно последнее равенство, получим

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \int_0^z F(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

где $|z| < 1$.

5.3. Ряд Лорана

Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то она разлагается в нем в ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = f_1 + f_2, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=c} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < c < R.$$

При $r = 0$ и $R < \infty$ кольцо вырождается в круг с выколотым центром. Ряды f_1 и f_2 называются соответственно правильной и главной частями ряда Лорана.

Определение 12. Внешность круга $|z| \leq R$ называется окрестностью бесконечно удаленной точки.

Если $f(z)$ однозначна и аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки (за исключением может быть только точки $z = \infty$), то она разлагается в ее окрестности в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

называемый рядом Лорана функции f в окрестности точки $z = \infty$.

Определение 13. Ряды

$$\tilde{f}_1(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \quad \text{и} \quad \tilde{f}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называются соответственно правильной и главной частями ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Часто нецелесообразно использовать непосредственную формулу для подсчета коэффициентов ряда Лорана, поэтому, как и в случае ряда Тейлора, прибегают к некоторым искусственным приемам.

Примеры

38. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

$$1) f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 3}, \quad z_0 = 1; \quad 2) f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \quad |a| < |b|.$$

► Решение: 1) используя метод неопределенных коэффициентов, разложим рациональную дробь $f(z)$ на сумму простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 3} = \frac{1}{(z-1)(z+3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ 3A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4}, \\ B = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Получаем

$$f(z) = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+3)} = f_1^*(z) - f_2^*(z).$$

Функция $f_2^*(z)$ аналитична в круге $|z-1| < 4$, (особые точки $z = -3$, $z = \infty$ в круг не попадают) и поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = 1$. Для этого представим $f_2^*(z)$ в виде

$$\frac{1}{4(z+3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{((z-1)+4)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{4}}.$$

Учитывая что

$$|z-1| < 3 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{4} < 1,$$

имеем

$$f_2^*(z) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{4} \right)^n.$$

Функция $f_1^*(z)$ аналитична в кольце $|z-1| > 0$ и уже записана рядом Лорана по степеням $(z-1)$. Окончательно получаем

$$f(z) = f_1^*(z) - f_2^*(z) = \frac{1}{4(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{4^{n+2}} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-1)^n}{4^{n+2}},$$

где $0 < |z-1| < 4$.

39. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана: а) в кольце $|a| < |z| < |b|$; б) в окрестности бесконечно удаленной точки.

► Решение: а) с помощью метода неопределенных коэффициентов

$f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{(z-a)} - \frac{1}{(z-b)} \right] = \frac{1}{a-b} (f_1^*(z) - f_2^*(z)).$$

Функция $f_1^*(z)$ аналитична во внешности круга $|a| < |z| \Leftrightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1$,

поэтому

$$f_1^*(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-\frac{a}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}.$$

Для функции $f_2^*(z): |z| < |b| \Leftrightarrow \left|\frac{z}{b}\right| < 1$.

$$f_2^*(z) = \frac{1}{z-b} = \frac{1}{b} \frac{-1}{(1-\frac{z}{b})} = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}}.$$

Окончательно

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right].$$

► Решение: b) окрестностью бесконечно удаленной точки будет кольцо $|b| < |z| < \infty$, поэтому из условия $|a| < |b| < |z|$ имеем

$\frac{|a|}{|z|} < \frac{|b|}{|z|} < 1$. Получаем

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{z(1-\frac{a}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{b}{z})} \right] = \frac{1}{a-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{z^{n+1}}.$$

40. Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0 :

1) $\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)$, $z_0 = -1$; 2) $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$.

► Решение: 1) запишем дробь $\frac{z}{z+1}$ в виде $1 - \frac{1}{z+1}$. Тогда

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \cos(1) \cdot \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) + \sin(1) \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right).$$

Воспользовавшись стандартными формулами (22) и (23) для $\cos(z)$ и $\sin(z)$, получаем

$$\cos\left(\frac{z}{z+1}\right) = \cos(1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sin(1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

где $|z+1| > 0$.

► Решение: 2) представим дробь $\frac{1-e^{-z}}{z^3}$ в виде $\frac{1}{z^3}(1-e^{-z})$ и воспользуемся стандартным разложением (21):

$$\frac{1}{z^3}(1-e^{-z}) = \frac{1}{z^3} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right] = \frac{1}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{n-3}}{n!}.$$

Так как особые точки функции: $z=0$ и $z=\infty$, то мы получили разложение в кольце $0 < |z| < \infty$.

Разложить функцию $f(z) = \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ в ряд Лорана в области $1 < |z| < \infty$.

$$F(z) = \left[\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \right]' = \frac{2}{z^2-1} = \frac{2}{z^2} \frac{1}{1-z^{-2}} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Этот ряд равномерно сходится на любой гладкой кривой, соединяющей точку z с ∞ . Интегрируя почленно, находим

$$\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \int_{\infty}^z F(t) dt = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\infty}^z \frac{dt}{t^{2k}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k-1} \frac{1}{2k-1}.$$

5.4. Классификация изолированных особых точек однозначного характера аналитической функции

Определение 14. Точка $z_0 \neq \infty$ называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки $0 < |z - z_0| < R$ однозначная функция $f(z)$ аналитична, а в самой точке z_0 не определена или не аналитична.

Бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если в кольце $R < |z| < \infty$ однозначная функция $f(z)$ аналитична.

Точки ветвления многозначной функции называются особыми точками многозначного характера. В дальнейшем будем рассматривать только изолированные особые точки однозначного характера.

Классификация изолированных особых точек может быть проведена двумя эквивалентными способами:

по виду лорановского разложения функции в окрестности особой точки z_0 ;

по характеру поведения функции в окрестности этой точки.

Определение 15. Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$ если:

1) в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 отсутствует главная часть ряда, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n}, \quad z_0 = \infty;$$

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{const} \neq \infty$.

Определение 16. Точка z_0 называется полюсом порядка n функции $f(z)$, если:

1) в разложении в ряд Лорана в функции $f(z)$ окрестности z_0 главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, т.е.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_{-n} \neq 0, \quad z_0 \neq \infty, \quad (29)$$

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \quad c_n \neq 0; z_0 = \infty; \quad (30)$$

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Порядок полюса z_0 функции $f(z)$ равен по определению кратности нуля функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ в точке z_0 . Доказывается, что если в окрестности z_0 справедливо представление (29) или (30), то порядок полюса равен числу n .

Определение 17. Точка z_0 называется существенно особой точкой $f(z)$, если:

1) в разложении в ряд Лорана $f(z)$ в окрестности z_0 главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad z_0 \neq \infty,$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^0 c_{-k} z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad z_0 = \infty;$$

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Примеры

41. Определить характер изолированной особой точки z_0 для функции $f(z)$:

1) $f(z) = (1-z) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi z}{2} \right), \quad z_0 = 1;$ 2) $f(z) = z(e^{1/z} - 1), \quad z_0 = \infty.$

► Решение: 1)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (1-z) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi z}{2} \right) &= - \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} (1-z-1) \right) = \\ &= - \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} (1-z) - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} (1-z) \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \cos \left(\frac{\pi}{2} (1-z) \right) \cdot \frac{(1-z) \frac{\pi}{2}}{\left[\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-z) \right) \right] \cdot \frac{\pi}{2}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{2} (1-z) \right) = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

$z_0 = 1$ – устранимая особая точка $f(z)$;

► Решение: 2)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(e^{1/z} - 1) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z(e^{1/z} - 1))'}{\left(\frac{1}{z} \right)'} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{1/z} \cdot \left(-\frac{1}{z^2} \right)}{\left(\frac{1}{z} \right)'} = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{1/z} = 1;$$

z_0 – устранимая особая точка $f(z)$.

42. Найти полюсы функции $f(z)$ и определить их кратности:

1) $f(z) = \frac{z e^z}{z^4 - z^3 - 3z^2 + 5z - 2};$ 2) $f(z) = \frac{1}{z^3 (1 - \cos(z))}.$

► Решение: 1) запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{z e^z}{(z-1)^3 (z+2)}.$$

Имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z e^z}{(z-1)^3 (z+2)} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z e^z}{(z-1)^3 (z+2)} = \infty.$$

Точки $z = 1$ и $z = -2$ – нули знаменателя, причем $z = 1$ – нуль третьего порядка, а $z = -2$ – простой нуль. Числитель в этих точках в нуль не обращается, поэтому точки $z = 1$ и $z = -2$ будут соответственно полюсами 3-го и 1-го порядка функции $f(z)$.

► Решение: 2) нулями знаменателя будут точки $z = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Разложим знаменатель $f(z)$ в ряд:

$$\varphi(z) = z^3(1 - \cos(z)) = z^3 \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right] = z^3 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots \right).$$

Точка $z = 0$ – нуль пятого порядка функции $\varphi(z)$, поэтому $z = 0$ – полюс пятого порядка $f(z)$. Точки $z = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, – простые нули знаменателя, поэтому они будут простыми полюсами $f(z)$.

43. Определить характер точки $z_0 = -1$ для функции $f(z) = \cos\left(\frac{z}{z+1}\right)$.

► Решение. Докажем, что $\lim_{z \rightarrow -1} f(z)$ не существует. Выберем две последовательности:

$$\{z'_n\} = \left\{ \frac{2\pi n}{1 - 2\pi n} \right\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow -1, \quad \{z''_n\} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{1 - (2n+1)\pi} \right\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow -1.$$

Для них

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left[\frac{2\pi n}{(1 - 2\pi n)} : \left(\frac{2\pi n}{(1 - 2\pi n)} + 1 \right) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left[\frac{2\pi n(1 - 2\pi n)}{(1 - 2\pi n)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n) = 1. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1)\pi = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$.

Значит, $z_0 = -1$ – существенно особая точка $f(z)$.

Глава 6. ВЫЧЕТЫ

6.1. Вычисление вычетов

Пусть $z_0 \neq \infty$ – изолированная особая точка однозначной аналитической в проколотой окрестности точки z_0 функции $f(z)$, L – замкнутый жорданов кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя точку z_0 и лежащий целиком в окрестности z_0 .

Определение 18. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz. \quad (31)$$

Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени $(z - z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 , т.е.

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если $z_0 = \infty$, то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz,$$

где L^- – замкнутый жорданов кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя начало координат и полностью лежащий в окрестности бесконечно удаленной точки, где $f(z)$ аналитична, причем L^- означает, что обход осуществляется в отрицательном направлении. Кроме того

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

В зависимости от типа изолированных особых точек приведем формулы для вычисления вычетов $f(z)$.

1. Пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0, \quad \text{если } z_0 \neq \infty;$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)), \quad \text{если } z_0 = \infty. \quad (32)$$

2. Пусть z_0 – полюс n -го порядка, $z_0 \neq \infty$, тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)], \quad (33)$$

в частности при $n = 1$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Если z_0 – простой полюс и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические функции в точке z_0 , причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \quad (34)$$

если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z_0).$$

3. Если z_0 – существенно особая точка $f(z)$, то, раскладывая $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$, находим c_{-1} , тогда

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}, \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Заметим еще, что, если $f(z)$ – четная функция, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=-z_0} f(z) \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

если $f(z)$ – нечетная, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=-z_0} f(z). \quad (35)$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ. Если z_1, z_2, \dots, z_n – изолированные конечные особые точки функции $f(z)$, аналитической, кроме этих точек во всей комплексной плоскости, то

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (36)$$

Примеры

44. Вычислить вычет функции $f(z)$ в точке z_0 :

$$1) f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}, \quad z_0 = i.$$

► Решение. Точка $z_0 = i$ – простой полюс $f(z)$, так как

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \infty.$$

Поэтому из формулы (48)

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)ze^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{ie^{-1}}{i+i} = \frac{1}{2e}.$$

$$2) f(z) = \frac{ze^{az} - e^z + 1}{z(e^z - 1)}, \quad z_0 = 2\pi i.$$

► Решение. Точка $z_0 = 2\pi i$ – полюс 1-го порядка, так как знаменатель функции имеет в точке z_0 нуль первого порядка, так как:

$$(e^{2\pi i} - 1) = (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi) - 1) = 0 \quad \text{и} \quad (e^z - 1)' = e^z \neq 0.$$

Представим

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \text{ где } \varphi(z) = \frac{ze^{az} - e^z + 1}{z}, \psi(z) = e^z - 1,$$

причем $\varphi(2\pi i) \neq 0$, $\psi(2\pi i) = 0$, $\psi'(2\pi i) = e^{2\pi i} = 1$, из (34) имеем

$$\operatorname{Res}_{z=2\pi i} f(z) = \frac{\varphi(2\pi i)}{\psi'(2\pi i)} = \frac{2\pi i e^{2\pi i a} - e^{2\pi i} + 1}{2\pi i} = e^{2\pi i a}.$$

3) $f(z) = \operatorname{ctg}^2(z)$, $z_0 = 0$.

► Решение. Точка $z_0 = 0$ – полюс 2-го порядка, так как знаменатель $\sin^2(z)$ в точке $z_0 = 0$ имеет нуль 2-го порядка. Из формулы (33) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 \operatorname{ctg}^2(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[2z \cdot \operatorname{ctg}^2(z) \frac{2z^2 \operatorname{ctg}(z)}{\sin^2(z)} \right] = \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \operatorname{ctg}(z) \cdot \left[\frac{\cos(z) \cdot \sin(z) - z}{\sin^2(z)} \right] = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\cos(z) \cdot \sin(z) - z)'}{(\sin^2(z))'} = \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(z) + (\cos^2(z) - 1)}{2\sin(z) \cdot \cos(z)} = -2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(z)}{2\sin(z) \cdot \cos(z)} = \\ &= -2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = 0. \end{aligned}$$

4) $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{-hz})}$, $h \neq 0$. Подсчитать вычеты во всех особых

точках.

► Решение. Точки $z_n = \frac{2n\pi i}{h}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ – простые полюсы, из формулы (32) имеем ($\varphi(z) = \frac{1}{z}$, $\psi(z) = (1 - e^{-hz})$)

$$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(z) = \frac{1}{z_n \cdot h e^{-hz_n}} = \frac{h}{2\pi n i \cdot h \cdot 1} = -\frac{i}{2\pi n}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad n \neq 0.$$

Точка $z_0 = 0$ – полюс второго порядка, так как знаменатель в z_0 имеет нуль второго порядка. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z_0 = 0$:

$$1 - e^{-hz} = \frac{hz}{1!} - \frac{h^2 z^2}{2!} + \frac{h^3 z^3}{3!} + \dots$$

Выполняя деление рядов

$$\begin{array}{r}
1 \\
- \\
1 - \frac{hz}{2!} + \dots
\end{array}
\left| \begin{array}{l}
\frac{hz}{1!} - \frac{h^2 z^2}{2!} + \frac{h^3 z^3}{3!} + \dots \\
\hline
\frac{1}{hz} + \frac{1}{2} + \dots
\end{array} \right. ,$$

$$\begin{array}{r}
\frac{hz}{2} - \frac{h^2 z^2}{3!} + \dots \\
- \\
\frac{hz}{2} - \frac{h^2 z^2}{4} + \dots
\end{array}$$

$$\frac{z^2 \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{3!} \right) + \dots}$$

получаем

$$\frac{1}{z(1 - e^{-hz})} = \frac{1}{hz^2} + \frac{1}{2z} + \dots \quad (0 < |z| < \frac{2\pi}{h}).$$

Отсюда: $c_{-1} = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}$.

$$5) f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, \quad z_0 = \infty.$$

► Решение. Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{(z-1)'} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{1} = 0,$$

то $z_0 = \infty$ – устранимая особая точка. Воспользовавшись формулой (32), найдем

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(0 - \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z-1} = 0.$$

$$6) f(z) = \ln(z) \cdot \sin\left(\frac{1}{z-1}\right), \quad z_0 = 1.$$

► Решение. Точка $z_0 = 1$ – существенно особая точка. Разложим функцию в ряд, воспользовавшись формулами (22) и (26):

$$\ln(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k} = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} + \dots,$$

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots$$

Перемножая два ряда, найдем коэффициенты при первой отрицательной степени $(z-1)^{-1}$:

$$c_{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3!} - \frac{1}{4 \cdot 5!} + \frac{1}{6 \cdot 7!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)!}.$$

6.2. Вычисление интегралов с помощью вычетов

I. Если однозначная функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области \overline{D} , за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k=1, 2, \dots, n$, область D ограничена замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой Γ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (37)$$

где контур Γ обходится в положительном направлении относительно области D .

Примеры

45. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-2)} dz; \quad D: \Gamma = \{z, |z+1| + |z-1| = \varepsilon\}.$$

► Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = 0$ – полюс второго порядка, $z_2 = 2$ – простой полюс, $z_3 = \infty$ – устранимая особая точка. Точки $z_1, z_2 \in D$, $z_3 \notin D$, воспользовавшись формулой (33), подсчитаем вычеты в точках z_1, z_2 :

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 + 1}{(z-2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 4z - 1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-2)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 1}{z^2} = \frac{5}{4}.$$

Тогда из (37) имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi i.$$

$$2) \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch}(z)}{(z^2 - 1)\cos(z)} dz; \quad D: \Gamma = \left\{ z, |z-1| + |z+1| = \frac{5}{4} \right\}.$$

► Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются точки $z_{1,2} = \pm 1$ (простые полюса), которые лежат внутри контура Γ , и точки $\tilde{z}_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, лежащие вне контура Γ .

Подсчитаем вычеты в точках z_1, z_2 :

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{\operatorname{ch}(z)}{(z^2-1)\cos(z)} = \frac{\operatorname{ch}(1)}{2\cos(1)}, \quad \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{\operatorname{ch}(z)}{(z^2-1)\cos(z)} = \frac{\operatorname{ch}(1)}{-2\cos(1)}.$$

Из (53) имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch}(z)}{(z^2-1)\cos(z)} dz = 2\pi i \left(\frac{\operatorname{ch}(1)}{2\cos(1)} - \frac{\operatorname{ch}(1)}{2\cos(1)} \right) = 0.$$

$$3) \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz.$$

► Решение. В круге $|z| \leq 2$ лежат четыре особых точки подынтегральной функции $z_k = \sqrt[4]{1}$, $k = \overline{1,4}$ (полюсы). Вне круга лежит только одна особая точка — $z_5 = \infty$ (устраняемая особая точка). Воспользовавшись основной теоремой о вычетах (см. формулу (36))

$$\sum_{k=1}^4 \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4-1} = -\operatorname{Res}_{z=z_5} \frac{z^3}{z^4-1}$$

и формулой (32), имеем

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_5} \frac{z^3}{z^4-1} = -2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z^4}{z^4-1} = 2\pi i.$$

$$4) \int_{|z-1-i|=2} \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{iz+1} dz.$$

► Решение. Внутри контура интегрирования лежат две особые точки подынтегральной функции: $z=i$ — простой полюс, $z=0$ — существенно особая точка, для вычисления вычета в которой формул не существует и, следовательно, подсчитывать вычет сложно. Вне контура лежит только одна особая точка $z=\infty$, причем вычет в ней достаточно легко считается по формуле (32). Отсюда

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{iz+1} dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{iz+1} = -2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right)}{iz+1} = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi.$$

II. Теорию вычетов можно применять для вычисления интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx, \quad (38)$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция аргументов u и v , не имеющая особенностей на окружности $u^2 + v^2 = 1$.

Пусть $z = e^{ix}$, тогда

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dx = \frac{dz}{iz}. \quad (39)$$

Когда x меняется от 0 до 2π , точка z пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Интеграл (38) такой заменой сводится к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексного аргумента, который легко вычисляется с помощью вычетов (см. (37)).

Примеры

46. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\rho \cos(x) + \rho^2}$, $|\rho| \neq 1$, ρ – комплексное число.

► Решение. Сделаем замену переменной (57):

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\rho \cos(x) + \rho^2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{\rho z^2 - (1 + \rho^2)z + \rho}.$$

Точки $z = \rho$, $z = \frac{1}{\rho}$ – простые полюсы подынтегральной функции, причем только один лежит в круге $|z| < 1$. Если $|\rho| < 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \rho$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\rho \cos(x) + \rho^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\rho} \frac{i}{\rho z^2 - (1 + \rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{1 - \rho^2}.$$

Если $|\rho| > 1$, то в круге $|z| < 1$ лежит полюс $z = \frac{1}{\rho}$ и

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\rho \cos(x) + \rho^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\frac{1}{\rho}} \frac{i}{\rho z^2 - (1 + \rho^2)z + \rho} = \frac{2\pi}{\rho^2 - 1}.$$

2) $J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\varphi)}{1 - 2a \cdot \cos(\varphi) + a^2} d\varphi$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$.

► Решение. После замены переменных (39) имеем

$$J = -\frac{1}{4ai} \int_{|z|=1} \frac{(z^6 + 1)^2}{z^6 (z - a) (z - \frac{1}{a})} dz.$$

Особыми точками подынтегральной функции $F(z)$ будут точки $z_1 = 0$ (полнос шестого порядка), $z_2 = a$, $z_3 = \frac{1}{a}$ (простые полюсы). Пусть $|a| < 1$, тогда в круге $|z| < 1$ лежат полюсы z_1 и z_2 . Вычислим

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z^6 + 1)^2}{z^6 (z - \frac{1}{a})} = \frac{(1 + a^6)^2}{a^5 (a^2 - 1)}.$$

Для вычисления вычета в $z_1 = 0$ можно было бы воспользоваться формулой (33), но тогда пришлось бы искать производную пятого порядка от сложной дроби. Это нецелесообразно, поэтому разложим каждый из множителей $F(z)$ в ряд по формуле (27):

$$F(z) = \frac{(z^6 + 1)^2}{z^6} \frac{1}{(1 - \frac{z}{a})} \frac{1}{(1 - az)} = \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{z^6} \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \dots \right) \times$$

$$\times (1 + az + a^2 z^2 + \dots) = \left(z^6 + 2 + \frac{1}{z^6} \right) \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \dots \right) (1 + az + a^2 z^2 + \dots).$$

Перемножая ряды, соберем все коэффициенты при z^{-1} :

$$\operatorname{Res} F(z) = a^5 + a^3 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5}.$$

Тогда

$$J = -\frac{\pi}{2a} \left(\frac{(1 + a^6)^2}{a^5 (a^2 - 1)} + a^5 + a^3 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} \right) = \pi \frac{1 + a^6}{1 - a^2}.$$

Аналогично при $|a| > 1$:

$$J = \frac{\pi}{a^6} \frac{1 + a^2}{a^2 - 1}.$$

3) $J = \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + ia) dx$, $a \neq 0$ – действительное число.

► Решение. Так как функция $\operatorname{tg}(x)$ – периодическая с периодом π , то имеем

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + ia) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x + ia) dx.$$

Пользуясь тригонометрическими тождествами и сделав замену $z = e^{ix-a}$, получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg}(x+ia) dx = -\frac{1}{2} \int_{|z|=e^{-a}} \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} dz.$$

Если $a > 0$, то $e^{-a} < 1$ и в круге $|z| < e^{-a}$ лежит лишь одна особая точка $z = 0$ (полюс первого порядка). Поэтому

$$\int_{|z|=e^{-a}} \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} = -2\pi i \text{ и } J = \pi i.$$

Если $a < 0$, то $e^{-a} > 1$, тогда в круге $|z| < e^{-a}$ лежат три особые точки: $0; \pm i$, а вне круга – лишь одна $z = \infty$ (устраняемая особая точка), следовательно

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} = -1.$$

По основной теореме о вычетах имеем $J = -\pi i$. Объединяя случаи $a > 0$ и $a < 0$, имеем

$$J = \pi i \cdot \operatorname{sign}(a).$$

$$4) J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

► Решение. Заменой переменных $x = \cos(\varphi)$ сведем интеграл J к виду (38):

$$J = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos(\varphi)},$$

стандартной заменой (39) и по формуле (36) подсчитаем

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \cos(\varphi)} = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

III. Теорию вычетов можно использовать при вычислении несобственных интегралов по вещественной оси, если методы действительного анализа оказываются неэффективными.

1. Пусть $f(z)$:

a) аналитична в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_k , $\operatorname{Im}(z_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, непрерывна в замкнутой полуплоскости за исключением тех же точек и

b) $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) \quad (40)$$

(аналогично для нижней полуплоскости, но в (40) правую часть нужно брать со знаком «минус»).

2. Если $f(z)$:

a) аналитична в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_k , $\operatorname{Im}(z_k) > 0$, $k=1, 2, \dots, n$, непрерывна в замкнутой полуплоскости за исключением тех же точек и

b) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(x)e^{imx}), \quad m > 0. \quad (41)$$

Если кроме того $f(x) \in \mathbf{R}$, при $x \in \mathbf{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(mx) dx = -2\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z)e^{imx}) \right], \quad m > 0, \quad (42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(mx) dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z)e^{imx}) \right], \quad m > 0. \quad (43)$$

Примеры

47. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a + bx^2)^2}$, $a > 0$, $b > 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{imx}}{1 + x^2} dx$, $m > 0$;

3) $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

► Решение: 1) рациональная функция $R(z) = \frac{z^2}{(a + bz^2)^2}$ аналитична

в верхней полуплоскости, за исключением точки $z_1 = i\sqrt{\frac{a}{b}}$ (полюс второго

порядка) и $\lim_{z \rightarrow \infty} z R(z) = 0$.

$$\operatorname{Res} R(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{b^2 \left(z + i\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2} \right] = \frac{1}{4i\sqrt{ab^3}}.$$

Из (40) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a + bx^2)^2} = 2\pi i \frac{1}{4i\sqrt{ab^3}} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab^3}}.$

► Решение: 2) функция $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ – аналитическая в верхней полуплоскости, включая действительную ось, кроме точки $z = i$ (полюс); $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, поэтому из формулы (41):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{imx}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{ze^{imx}}{1+z^2} = \frac{\pi i}{e^m}.$$

► Решение: 3) преобразуем J :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + a^2} dx.$$

Первый интеграл – табличный

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x/a)}{(x/a)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

При вычислении второго интеграла воспользуемся формулой (42), учитывая, что $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ – четная функция:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + a^2} dx = -\pi \operatorname{Im} \left(\operatorname{Res}_{z=ai} \frac{e^{2iz}}{z^2 + a^2} \right) = -\pi \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-2a}}{2ai} \right) = \pi \frac{e^{-2a}}{2a}.$$

Окончательно: $J = \frac{\pi}{4a} - \frac{\pi a^{-2a}}{4a} = \frac{\pi}{4a} (1 - e^{-2a}).$

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1

Задание к каждому варианту

1. Представить комплексное число z в алгебраической форме.
2. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному условию.
3. Записать комплексное число z в тригонометрической и показательной формах.
4. Используя формулу Муавра, вычислить.
5. Найти корни уравнения и отметить их на комплексной плоскости.

Вариант 1

$$1. z = \frac{2}{i+1} - \frac{(1+i)(2-2i)}{(1-i)(1-2i)}$$

$$2. |z-1| \leq |z+1|$$

$$3. z = 1 + 2i$$

$$4. \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{15}$$

$$5. z^2 - (2+i)z + 2i = 0$$

Вариант 3

$$1. z = \frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$$

$$2. |1+z| < |2-z|$$

$$3. z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^7$$

$$5. z^4 + 1 = 0$$

Вариант 2

$$1. z = \frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}} - \frac{(1+i)(\sqrt{3}+2i)}{7}$$

$$2. \operatorname{Re} z^2 < 1$$

$$3. z = \sqrt{3} + i$$

$$4. \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \right)^9$$

$$5. z^2 - (5+2i)z + 5 + 5i = 0$$

Вариант 4

$$1. z = \frac{1}{i+1} - \frac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+i)}$$

$$2. \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}; 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$$

$$3. z = -1 + i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} \right)^8$$

$$5. z^3 - zi = 0$$

Вариант 5

$$1. z = \frac{3}{1-i} - \frac{(1+i)(3+3i)}{(1+2i)(1-i)}$$

$$2. \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 3$$

$$3. z = -1 + 2i$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}-3i}{1+i} \right)^4$$

$$5. z^4 + i = 0$$

Вариант 7

$$1. z = \frac{3-2i}{i-3} - \frac{(3+2i)i}{1+i}$$

$$2. \operatorname{Im}(z-i) \geq 2$$

$$3. z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i} \right)^7$$

$$5. z^2 - 2\sqrt{3}i + 2 = 0$$

Вариант 9

$$1. z = \frac{2+3i}{3-i} - \frac{3}{(3+i)(1-i)}$$

$$2. z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$$

$$3. z = -\sqrt{3} + i$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+2i} \right)^{10}$$

$$5. z^2 + 2\sqrt{3}i - 2 = 0$$

Вариант 11

$$1. z = \frac{2+3i}{i-3} - \frac{2-3i}{(1-i)i}$$

$$2. |z-2| = \bar{z}$$

$$3. z = -1 - 2i$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right)^8$$

$$5. z^3 - i = 0$$

Вариант 6

$$1. z = \frac{i-3}{3-2i} - \frac{i(1+2i)}{3+2i}$$

$$2. \operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0$$

$$3. z = \sqrt{3} - i$$

$$4. \left(\frac{3-i}{-3+i} \right)^5$$

$$5. z^3 + 1 = i$$

Вариант 8

$$1. z = \frac{i-1}{i+1} - \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(2-2i)}$$

$$2. 1 < |1+z| + |z-3| < 2$$

$$3. z = 1 - 2i$$

$$4. \left(\frac{2+i}{2-i} \right)^6$$

$$5. z^4 - i = 0$$

Вариант 10

$$1. z = \frac{1-i}{3} - \frac{(1-2i)(1+i)}{(1+2i)(1-i)}$$

$$2. \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \operatorname{Im} \bar{z}$$

$$3. z = 1 - i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^8$$

$$5. z^4 - 1 = 0$$

Вариант 12

$$1. z = \frac{i-1}{2} - \frac{(1+i)(i+2)}{(1-i)^2}$$

$$2. \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geq -1$$

$$3. z = \sqrt{3} - i$$

$$4. \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right)^7$$

$$5. z^2 - \sqrt{3}i + 3 = 0$$

Вариант 13

$$1. z = \frac{i-1}{2+i} - \frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)}$$

$$2. \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$$

$$3. z = 1 - i$$

$$4. \left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \right)^{10}$$

$$5. z^3 + i = 0$$

Вариант 15

$$1. z = \frac{(4+i)(3+i)}{3-i} - \frac{(4-i)(3-i)}{3+i}$$

$$2. 2 < |z-1+2i| < 4$$

$$3. z = 2 - 2i$$

$$4. \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i} \right)^8$$

$$5. z^4 + i = 1$$

Вариант 17

$$1. z = \frac{i-i}{i+1} - \frac{(1+i)(1-2i)}{(1-i)(1+2i)}$$

$$2. |z-3| < \bar{z}$$

$$3. z = -2 + i2\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-3i} \right)^5$$

$$5. z^2 - 2\sqrt{3}i + 2 = 0$$

Вариант 19

$$1. z = \frac{3}{1+i} - \frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+2i)}$$

$$2. 4 \leq |z-1| + |z+1| \leq 8$$

$$3. z = 1 + i$$

$$4. \left(\frac{-i}{2\sqrt{3}+2i} \right)^3$$

$$5. z^4 - 16 = 0$$

Вариант 14

$$1. z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)(2-2i)}$$

$$2. |z-1| < |z+i|$$

$$3. z = 3 + i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} \right)^8$$

$$5. z^2 + 2i + 2 = 0$$

Вариант 16

$$1. z = \frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2i} + \frac{(1+i)i}{\sqrt{3}+2i}$$

$$2. -1 < \operatorname{Re} z < 5, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 1$$

$$3. z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$4. \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+3i} \right)^6$$

$$5. z^3 + zi = 0$$

Вариант 18

$$1. z = \frac{3-i}{2+3i} - \frac{(3+i)(1-i)}{2i}$$

$$2. |z| > 2 + \operatorname{Im} z$$

$$3. z = -3 - i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+3i} \right)^{10}$$

$$5. z^3 - i - 1 = 0$$

Вариант 20

$$1. z = \frac{i-3}{2+3i} + \frac{i(1+i)}{2-3i}$$

$$2. |z-i| + |z+i| > 4$$

$$3. z = -3 + i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{i}{2\sqrt{3}-2i} \right)^5$$

$$5. z^2 + \sqrt{3}i = 3$$

Вариант 21

$$1. z = \frac{1+i}{2} + \frac{(1+i)(2i+2)}{(1-i)i}$$

$$2. |z-4| < |1-4\bar{z}|$$

$$3. z = -2 - 2i$$

$$4. \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{10}$$

$$5. z^2 - 2i + 2 = 0$$

Вариант 23

$$1. z = \frac{2}{i-2} - \frac{(1-i)^2}{1+i}$$

$$2. |z+i| < |z-i|$$

$$3. z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$4. \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^7$$

$$5. z^2 - 2\sqrt{3}i - 2 = 0$$

Вариант 25

$$1. z = \frac{3+2i}{i+3} - \frac{(3-i)(i+1)}{i}$$

$$2. |z| > 1 - \operatorname{Re} z$$

$$3. z = 3 - i\sqrt{3}$$

$$4. \left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{i} \right)^8$$

$$5. z^4 + 1 = i$$

Вариант 22

$$1. z = \frac{(1-i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)}$$

$$2. \frac{3}{4} < \operatorname{Im} z + |z|^2 < \frac{7}{4}$$

$$3. z = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$4. \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^5$$

$$5. z^4 + 16 = 0$$

Вариант 24

$$1. z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{(1-i)(2-2i)}{(1+i)(2+2i)}$$

$$2. 1 \leq |z-1-i| < 3$$

$$3. z = -1 + i$$

$$4. \left(\frac{-\sqrt{3}-3i}{1-i} \right)^6$$

$$5. z^3 - i = 1$$

Контрольная работа 2

Задание к каждому варианту

1. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках и в бесконечности. Дать характеристику особых точек.
2. Вычислить интегралы по замкнутому контуру ∂D .
3. Вычислить следующие несобственные интегралы.

Вариант 1

1. $\frac{1}{z^6(z-2)}$
2. $\int_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz, D: |z-1| > 1$
3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2} dx;$
 б) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\sin \varphi}$

Вариант 3

1. $\sin z \sin \frac{1}{z}$
2. $\int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz, D: |z| > 2$
3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx;$
 б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

Вариант 5

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$
2. $\int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, D: |z| > 3$
3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+2x^2+2} dx;$
 б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

Вариант 7

1. ze^{z-1}
2. $\int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz, D: |z| < 3$

Вариант 2

1. $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$
2. $\int_{\partial D} \exp \frac{1}{1-z} \frac{dz}{z}, D: |z-2| + |z+2| < 6$
3. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}, a > 0, b > 0;$
 б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5+4\cos x} dx$

Вариант 4

1. $\frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$
2. $\int_{\partial D} \frac{z dz}{e^{z^2}-1}, D: |z| > 4$
3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx;$
 б) $\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos \varphi}{2-\sin \varphi} d\varphi$

Вариант 6

1. $z^2 \sin \frac{\pi}{z}$
2. $\int_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz, D: |z| < 2$
3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3+13x)}{x^4+3x^2+4.5} \sin x dx;$
 б) $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+3x} dx$

Вариант 8

1. $\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$
2. $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4-1} dz, D: |z| < 2$

$$3. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + 2x^2 + 2} dx, \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + 4i) dx$$

Вариант 9

$$1. \frac{1 + z^8}{z^4(z^4 + 1)} \cos z$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z}{z + 3} e^{\frac{1}{3z}} dz, \quad D: |z| > 4$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{5 + 4 \cos x}$$

Вариант 11

$$1. \operatorname{ctg} \pi z$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z^3 dz}{e^{z^2} - 1} \quad (D: |z| < 4)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2} \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$$

Вариант 13

$$1. \frac{1}{e^z - 2}$$

$$2. \int_{\partial D} \exp \frac{1}{1-z} \frac{dz}{z}$$

$$(D: |z-2| + |z+2| < 6)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2ix - 1};$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x-1) dx$$

Вариант 10

$$1. \frac{1 + z^8}{z^6(z+2)}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz, \quad D: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx, \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

Вариант 12

$$1. \operatorname{ctg}^2 \pi z$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{2z - i} dz \quad \left(\begin{array}{l} D: |z| < 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5ix - 4)^2}$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + 8i) dx$$

Вариант 14

$$1. \cos \pi \frac{z+2}{2z}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z^2 dz}{e^{2\pi iz^3} - 1} \quad \left(D: |z| < \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \right)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 1};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{9+8x}$$

Вариант 15

$$1. \frac{1}{e^z + 1}$$

$$2. \int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz \quad (D: |z| > 2)$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{ix} dx}{x^2 - 6x + 10};$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(13+12x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

Вариант 17

$$1. ze^{\frac{1}{z-1}}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2} - 1} dz \quad (D: |z| < 3)$$

$$3. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + 2^4)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

Вариант 19

$$1. z^n e^{\frac{a}{z}}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{\text{ctg} z}{z} dz \quad (D: |z| > 1)$$

$$3. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{4+7x} dx$$

Вариант 21

$$1. \frac{2}{e^z + \pi}$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \text{ctg}(x-9) dx$$

Вариант 16

$$1. \frac{1}{\sin \pi z}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{\sin z dz}{(z^3 - 1)(z - i)} \quad (D: |z - 1| < 1)$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 10} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{2 - \sin^2 \varphi}$$

Вариант 18

$$1. z \cos^2 \frac{\pi}{z}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z}{e^{z^2} - 1} dz \quad (D: |z| > 5)$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3};$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8 + \sin \varphi}$$

Вариант 20

$$1. \frac{1}{\sin z^2}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{\sin z dz}{(z^3 - 1)(z - i)} \quad (D: |z - 1| < 1)$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 2x + 10};$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \text{ctg}(x-2i) dx$$

Вариант 22

$$1. \cos \pi \frac{z+2}{2z}$$

$$2. \int_{\partial D} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz \quad (D: |z| > 2)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2 - 4x + 5};$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + 3i) dx$$

Вариант 23

$$1. \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi}{4}}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z}{(z+3)(e^z - 1)} dz \quad (D: |z| < 4)$$

$$3. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5ix - 4)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{6 + \sin \varphi}$$

Вариант 25

$$1. z \cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz \quad (D: |z| > 3)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{(1 + 3\cos^3 x)(1 + 8\sin^2 x)} dx$$

Вариант 27

$$1. \frac{1}{(z-1)^2 \left(e^z - \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{e^{\pi z}}{(2z^2 - i)} dz \quad \begin{pmatrix} D: |z| < 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(7-a)\sqrt{1-x^2}}$$

Вариант 24

$$1. \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z^2}{e^{2\pi iz^3} - 1} dz \quad \left(D: |z| > \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \right)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$$

Вариант 26

$$1. \frac{(z^{10} - 1) \cos \frac{1}{z}}{(z^5 + 2)(z^6 - 1)}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{\operatorname{ctg} z}{z} dz \quad (D: |z| > 1)$$

$$3. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi$$

Вариант 28

$$1. \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$$

$$2. \int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz \quad (D: |z - 1| < 1.5)$$

$$2. \int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} dz \quad (D: |z| > 2)$$

$$3. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx;$$

$$3. \text{ а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4+x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{б) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a^2 + 1)\sqrt{1-x^2}}$$

Контрольная работа 3

Вариант 1

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z: x > 0, y > 0\}, \quad w = \frac{z-i}{z+i};$$

$$2) D = \{z: |z| > 3/2, x > 0, y > 0\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$3) D = \{z: |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}, \quad w = e^z;$$

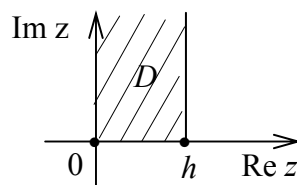
$$4) D = \{z: |z| < 9, \operatorname{Re} z < 0\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad w(-1) = i (\varphi_0 = 0);$$

$$5) D = \{z: z \notin [0; \infty)\}, \quad w = \ln z;$$

$$z_{01} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad w_{01} = \frac{10\pi i}{3}, \quad z_{02} = i, \quad w_{02} = \frac{5\pi i}{2}.$$

2. Доказать: $\operatorname{ctg} z = i \operatorname{ctg} iz$; $\operatorname{Im}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} x \cdot \sin y$. Вычислить: i^i ; $\sqrt[3]{i+1}$.

3. Найти функцию, осуществляющую конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.



Вариант 2

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \quad w = \frac{z-1}{z+2};$$

$$2) D = \{z: |z| < 1/2, 0 < \arg z < \pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$3) D = \{z: z \notin [0; +\infty)\}, \quad w = \ln z,$$

$$z_{01} = 1, w_{01} = 4\pi i; \quad z_{02} = -i, \quad w_{02} = \frac{3\pi i}{2};$$

$$4) D = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2\}, \quad w = z^2 + 1;$$

$$5) D = \left\{z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} < 1, y > 0\right\}, \quad a > 1, \quad w(+i0) = i, \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

$$2. \text{ Доказать: } \operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \text{ Вычислить: } (1+i)^i; \sqrt[8]{i-1}; \arccos 2.$$

$$3. D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}; \quad G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}. \quad D \xrightarrow{f=?} G.$$

Вариант 3

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z : 0 < \arg z < \pi/4\}, \quad w = \frac{z}{z-1};$$

$$2) D = \{z : |z| < 1, \pi/4 < \arg z < \pi/2\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$3) D = \{z : -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}, \quad w = \sin z;$$

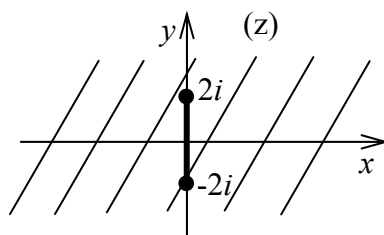
$$4) D = \{z : |z| < 1, z \notin [0;1]\}, \quad w = \ln z, \quad w(-1+0) = -\pi i;$$

$$5) D = \{z : |z| = 2, 0 < \arg z < \pi/8\}, \quad w = z^3 - 1.$$

$$2. \text{ Доказать: } \operatorname{Re}(\cos(x)) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y; \quad \operatorname{Im}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{sh} y \cdot \sin y.$$

Найти все значения функций: $\operatorname{arctg} 3; \ln(-i).$

$$3. D \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}.$$



Вариант 4

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z : |z+1| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = \frac{z-1}{z+3};$$

$$2) D = \left\{z : \frac{1}{4} < |z| < 1, z \notin \left[\frac{1}{4}; 1 \right] \right\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$3) D = \left\{z : |z| > \frac{1}{4}, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}, \quad w = \frac{1}{z};$$

$$4) D = \left\{ z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} < 1, z \notin [-1; 1] \right\}, \quad a > 1,$$

$$w(+i0) = -i, \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1};$$

$$5) D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sqrt[3]{z}, \quad z_0 = i, \quad w_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

$$2. \text{ Доказать: } \operatorname{Im} \operatorname{ctg} z = \frac{-\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}. \text{ Вычислить: } \arccos(-3); \ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right).$$

$$3. D = \{z : z \notin (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)\}; \quad G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}. \quad D \xrightarrow{f=?} G.$$

Вариант 5

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \quad w = \frac{z-1}{z-2};$$

$$2) D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, \quad w = \operatorname{ch} z;$$

$$3) D = \{z : |z| < 9, x < y\}, \quad w = z^2;$$

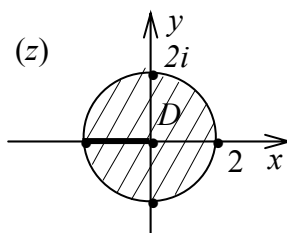
$$4) D = \left\{ z : |z| > 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad w(-1) = i;$$

$$5) D = \{z : |z| < 1, z \notin [0; 1]\}, \quad w = \ln z, \quad w(-1+0) = -pi.$$

$$2. \text{ Доказать: } \operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Решить уравнение: $\sin z - \cos z = i$.

$$3. D \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}.$$



Вариант 6

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

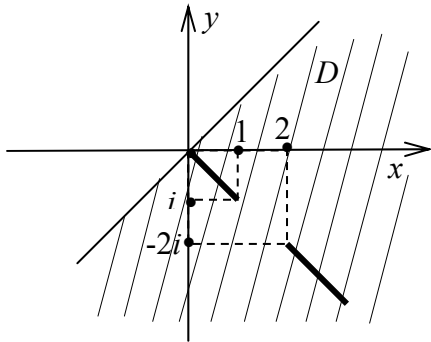
$$1) D = \{z : |z| > 2, \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$2) D = \{z : \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}, \quad w = e^z;$$

$$3) D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \quad w = \frac{z-1}{z};$$

4) $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1+i}{2}$;

5) $D = \{z : 2 < |z| < 4, z \notin [-4; -2]\}$, $w = \ln z$, $w(1) = -2\pi i$.



2. Доказать:

$$\arcsin z = -i \ln i \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Найти все значения функций:

$$\operatorname{arctg} 2i; \ln(\cos \varphi + i \sin \varphi), (-\pi < \varphi \leq \pi).$$

3. $D \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Вариант 7

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \left\{ z : |z| < 2, \pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi \right\}$, $w = \frac{1}{z-2}$;

2) $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(+i\infty) = 0$, $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$;

3) $D = \left\{ z : |z| < 1, \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2}{3}\pi, z \notin \left[0; \frac{i}{2}\right] \right\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;

4) $D = \left\{ z : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$,

$$w = \sin \pi z;$$

5) $D = \{z : a_1 < \operatorname{Im} z < a_2, a_2 - a_1 < 2\pi\}$,

$$w = e^z.$$

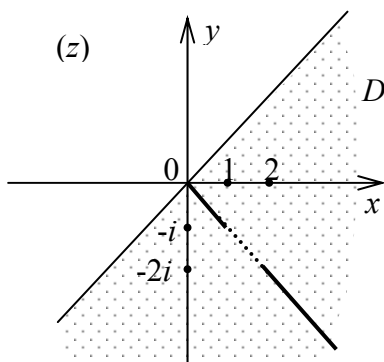
2. Доказать:

$$\operatorname{Re} \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y};$$

Решить уравнение:

$$\sin z = i.$$

3. $D \xrightarrow{f=?} \{\operatorname{Im} w > 0\}$.



Вариант 8

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \{z : |z| > 1, z \notin [-i, -2i]\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;

2) $D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < 0 \right\}$, $w = \sin z$;

$$3) D = \{z : z \notin [-\infty; +1]\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad w(4) = 2;$$

$$4) D = \{z : |z - 1| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \frac{z + 1}{z - 3};$$

$$5) D = \{z : z \notin [0, +\infty)\}, \quad w = \operatorname{Ln} z; \quad z_0 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad w_0 = \frac{10\pi i}{3}, \quad z_0 = i, \\ w_0 = \frac{5\pi i}{2}.$$

2. Решить уравнение: $\sin z + \cos z = 2$. Доказать: $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

$$3. D = \{z : |z - 1| > 1, |z + 1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : |w| > 1, \operatorname{Re} w > 0\}.$$

Вариант 9

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \left\{ z : \operatorname{Im} z < 0, z \notin \left[|z| = 1, -\frac{\pi}{3} < \arg z < 0 \right] \right\}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$2) D = \{z : |z + 1 + i| < 1, |z| > 1\}; \quad w = \frac{2z + 3}{z + i};$$

$$3) D = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}; \quad w = \sqrt{z}, \quad w(-1) = -i, \quad (\varphi_0 = 0);$$

$$4) D = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}; \quad w = z^2 + 1;$$

$$5) D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}; \quad w = \sin z.$$

2. Доказать: $\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{arth} iz$. Вычислить: $\operatorname{Arcsin} i, \operatorname{Ln}(-1)$.

$$3. D = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}.$$

Вариант 10

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0, (\operatorname{Im} z)^2 > 4 \operatorname{Re} z + 4 \right\}; \quad w = \sqrt{z}, \quad w(-1) = i;$$

$$2) D = \{z : |z + 1 + i| < 1, |z| < 1\}; \quad w = \frac{z - 1}{z + 1};$$

$$3) D = \{z : |z| > 1, z \notin [1; +\infty), \operatorname{Re} z > 0\}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$4) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}, -2 < \operatorname{Im} z < 0 \right\}; \quad w = \sin z;$$

$$5) D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}; \quad w = \operatorname{Ln} z, \quad w(i - i0) = -\frac{3\pi i}{2}.$$

2. Вычислить: $(1 - i)^{1+i}, \operatorname{Ln} e$. Доказать: $\operatorname{arch} z = i \operatorname{arccos} z$.

3. Найти дробно-линейное отображение такое, чтобы точки $(-1, 0, 1)$ переходили в точки $(-1, i, 1)$ и образом нижней полуплоскости была внутренность единичного круга с центром в начале координат.

Вариант 11

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z: |z - i| > 2, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \frac{1}{z};$$

$$2) D = \{z: -2 < \operatorname{Im} z < -1\}, \quad w = z^2;$$

$$3) D = \{z: |z| > 2, z \notin [2, +\infty)\}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

$$4) D = \left\{z: \operatorname{Arg} z \neq \frac{\pi}{4}\right\}, \quad w = \sqrt[3]{z};$$

$$5) D = \left\{z: -1 < \operatorname{Re} z < 0, \frac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad w = e^z.$$

2. Вычислить: i^i ; $\operatorname{Ln} 1$; $\operatorname{Arcctg} 2i$. Решить уравнение: $\operatorname{Ln}(z + i) = 1$.

3. $D = \{z: |z - i| < 2\} \xrightarrow{f=?} G = \{w: \operatorname{Re} w > 2\}, \quad w(-i) = 2, \quad w(0) = 3$.

Вариант 12

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{z: \operatorname{Im} z = 2 \operatorname{Re} z\}, \quad w = \frac{z - 3}{z + 3};$$

$$2) D = \left\{z: \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2}{3}\pi, z \notin [0; i]\right\}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

$$3) D = \left\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad w = \cos z;$$

$$4) D = \{z: (\operatorname{Im} z)^2 > 2 \operatorname{Re} z + 1\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad w(-1) = -i;$$

$$5) D = \left\{z: |z| < 1, \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{3}{8}\pi\right\}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2. Вычислить: $\operatorname{Arcth}(1 + 2i)$, $\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{i}(1 + i)\right)$. Решить уравнение: $\ln(i - z) = 0$.

3. $D = \{z: \operatorname{Im} z < 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w: |w - i| < 1\}$.

Вариант 13

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

- 1) $D = \{z : 1 < \operatorname{Im} z < 4\}$; $w = \frac{1}{z} + 1$;
- 2) $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$; $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- 3) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$; $w = \operatorname{sh} z$;
- 4) $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$; $w = \sqrt{z}$, $\sqrt{-1} = i (\varphi_0 = 0)$;
- 5) $D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0 \right\}$; $w = e^{2z}$.

2. Решить уравнение: $\cos z = i$. Доказать: $\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{arctg} iz$.

3. $D = \{z : |z| > 1, z \notin [-2; -1] \cup [1; 2]\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : |w| < 1\}$.

Вариант 14

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

- 1) $D = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 3\}$; $w = (1 + i)z + 1$;
- 2) $D = \left\{ z : |z| < 1, -\frac{3}{8}\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2} \right\}$; $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- 3) $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; $w = e^z$;
- 4) $D = \{z : z \notin [1; +\infty)\}$; $w = \sqrt[3]{z-1}$, $\sqrt[3]{-1} = -1$;
- 5) $D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$; $w = \operatorname{ctg} z$.

2. Доказать: $\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{arth} iz$. Вычислить: $\operatorname{Arth} i$, $\operatorname{Ln}(e)$.

3. $D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : w \notin (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)\}$.

Вариант 15

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

- 1) $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$; $w = \frac{1-z}{z+2}$;
- 2) $D = \left\{ z : \operatorname{Im} z < 0, z \notin \left[|z|=1, -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0 \right] \right\}$; $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$;
- 3) $D = \left\{ z : 1 < \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\}$; $w = e^z$;
- 4) $D = \left\{ z : |z| < 1, \frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}$; $w = z^{\frac{4}{3}}$;

$$5) D = \left\{ z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} < 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - 1} > 1 \right\}, \quad a > b > 1;$$

при $b < z < a$, $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

2. Вычислить: $(-1)^{ie}$; Arctgl . Решить уравнение: $\ln\left(\frac{z+1}{i}\right) = 1$.

3. $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < a, a > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Вариант 16

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = \frac{z}{z-i}$;

2) $D = \{z : z \notin (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)\}$, $w = \ln z$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$;

3) $D = \left\{ z : -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \sin z$;

4) $D = \{z : 1 < |z| < e, 0 < \arg z < e\}$, $w = \ln z + 1$;

5) $D = \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0, z \notin \left[|z|=1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right] \right\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

2. Вычислить: $\operatorname{Arcsin} i$, e^i . Решить уравнение: $\operatorname{ch} z = i$.

3. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : |w| < 1\}$,

$$w(i) = 0, \quad \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}, \quad w(2i) = 0, \quad \arg w'(2i) = 0.$$

Вариант 17

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \{z : 1 < \operatorname{Im} z < 2\}$, $w = \frac{iz+2}{z-1}$;

2) $D = \{z : -\infty < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = e^z$;

3) $D = \{z : z \notin [1; +\infty)\}$, $w = \sqrt[3]{z-1}$, $\sqrt[3]{-1} = -1$;

4) $D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}$, $w = \operatorname{ctg} z$;

5) $D = \left\{ z : |z| < \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\pi < \arg z < -\frac{\pi}{8} \right\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

2. Доказать: $\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}$. Решить уравнение: $\cos^2 z - 1 = 0$.

$$3. D = \left\{ z : \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{4} \right\} \xrightarrow{f=?} G = \{ w : |w| < 1, w(1) = 0, \arg w'(1) = \pi \}.$$

Вариант 18

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{ z : |z - 1| < 2 \}, \quad w = \frac{2iz}{z + 3};$$

$$2) D = \{ z : 0 < \operatorname{Im} z < 1 \}, \quad w = z^2;$$

$$3) D = \{ z : |z| > 1, z \notin [-2; -1] \cup [1; +\infty) \}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$4) D = \left\{ z : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} > 1 \right\}, \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad w(+\infty) = 0 \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2});$$

$$5) D = \{ z : 0 < \operatorname{Re} z < a, a > 0, b < \operatorname{Im} z < 0, |b| < 2\pi, b < 0 \}, \quad w = e^z.$$

2. Доказать: $\operatorname{Im} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y$.

Найти все значения функций: $\arcsin 10$; $\operatorname{Ln}(1)$; $1^{-\sqrt{3}}$.

$$3. D = \{ z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0 \} \xrightarrow{f=?} G = \{ w : \operatorname{Im} w < 0 \}.$$

Вариант 19

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{ z : z \notin [1; +\infty) \}, \quad w = \sqrt[3]{z - 1}, \quad \sqrt[3]{-1} = -1;$$

$$2) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}, \quad w = \operatorname{ctg} z;$$

$$3) D = \{ z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi \}, \quad w = e^z;$$

$$4) D = \{ z : 1 < |z| < e, 0 < \arg z < e \}, \quad w = \ln z + 1;$$

$$5) D = \{ z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0 \}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

2. Вычислить: $1^{\pi i}$, $\operatorname{Ln}(2i)$, $\cos(2 + i)$. Решить уравнение $\sin z = \pi i$.

$$3. D = \left\{ |z| < 1, z \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\} \xrightarrow{f=?} G = \{ \operatorname{Im} < 0 \}.$$

Вариант 20

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \{ z : |z| > 2, \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0 \}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$2) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad w = \cos z;$$

$$3) D = \left\{ z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0 \right\}, \quad w = \frac{z+2}{2z+1};$$

$$4) D = \left\{ z : |z| < 9, \operatorname{Re} z < 0 \right\}, \quad w = \sqrt{z}, \quad \sqrt{-1} = i \quad (\varphi_0 = 0);$$

$$5) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi \right\}, \quad w = \operatorname{cth} z.$$

2. Доказать: $\arcsin z = -i \cdot \operatorname{arsh} iz$. Решить уравнение: $\sin z + \sin 2z = 0$.

$$3. D = \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0, z \notin [ia, +i\infty), a > 0 \right\} \xrightarrow{f=?} G = \left\{ \operatorname{Im} w > 0 \right\}.$$

Вариант 21

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < 0 \right\}, \quad w = \sin z;$$

$$2) D = \left\{ z : |z| < 2, 0 < \operatorname{Re} z < 1 \right\}, \quad w = \frac{z+1}{z-1};$$

$$3) D = \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0 \right\}, \quad w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad w(0) = -i;$$

$$4) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0 \right\}, \quad w = \operatorname{cth} z;$$

$$5) D = \left\{ z : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta, \gamma < \operatorname{Im} z < \delta \right\}, \quad \delta - \gamma \leq 2\pi, \quad w = e^z.$$

2. Доказать: $\operatorname{arsh} z = -i \cdot \arcsin iz$. Решить уравнение: $\ln \frac{z+1}{i} = 1$

$$3. D = \left\{ z : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, z \notin [0, \pi) \right\} \xrightarrow{f=?} G = \left\{ \operatorname{Im} w > 0 \right\}.$$

Вариант 22

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \left\{ z : z \notin [0, +\infty) \right\}, \quad w = \sqrt[3]{z}, \quad w(-1) = -1;$$

$$2) D = \left\{ z : z \notin [i, +i\infty), z \notin (-i\infty, -i] \right\}, \quad w = \operatorname{Arsh} z;$$

$$3) D = \left\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4} \right\}, \quad w = \operatorname{tg} z;$$

$$4) D = \left\{ z : r_1 < |z| < r_2, z \notin [r_1, r_2] \right\}, \quad w = \ln z;$$

$$5) D = \left\{ 1 < |z| < 2 \right\}, \quad w = \frac{z}{z-1}.$$

2. Решить уравнение: $\cos^2 z - 1 = 0$. Вычислить: $(-2)^{i+1}$, $\operatorname{Arsh}(2i)$, $\operatorname{Ln}(2-3i)$.

3. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$.

Вариант 23

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \{z : \operatorname{Im} z < 2\operatorname{Re} z, |z| < 1\}$, $w = \frac{z-3}{z+3}$;

2) $D = \left\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w = \operatorname{ch} z$;

3) $D = \left\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $w = \sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{1} = 1$ ($\varphi_0 = -\pi$);

4) $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1}{z+1}$;

5) $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \alpha \leq 2\pi\}$, $w = e^z$.

2. Доказать: $\operatorname{th} z = -i \cdot \operatorname{tg}(+iz)$. Вычислить: $(1+i)^{1-i}$, $\sin z = \pi i$, $w = \operatorname{tg} z$.

3. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, z \notin [0, ih], h > 0\} \xrightarrow{f=?} G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

Вариант 24

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

1) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1, 0 < \operatorname{Re} z < 2\}$, $w = z^2$;

2) $D = \left\{z : \frac{1}{R} < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$;

3) $D = \{z : |z| < 1\}$, $w = \frac{z}{z+1}$;

4) $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0, z \notin (-\infty, -1]\}$, $w = \operatorname{arcsin} z$;

5) $D = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $w = \cos z$.

2. Найти: $\operatorname{Ln}(2i+1)$, $(-1)^i$, $(+1)^{\sqrt{2}}$. Решить уравнение: $\operatorname{ch} z = i$.

3. Найти дробно-линейное отображение, которое область $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ отображает на область $G = \{w : |w| < 1\}$ так, что множество $(-1; 0; 1)$ переходит в множество $(-1; i; 1)$.

Вариант 25

1. Найти образы указанных областей D при данных отображениях:

$$1) D = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{8} \right\}, \quad w = \frac{z+1}{z};$$

$$2) D = \left\{ z : \pi < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad w = \sin z;$$

$$3) D = \left\{ z : |z| < 1, z \notin \left[\frac{i}{2}, i \right] \right\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right);$$

$$4) D = \{ z : \operatorname{Im} z > 0 \}, \quad w = \sqrt[3]{z}, \quad w(i) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$5) D = \{ z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi \}, \quad w = \operatorname{tg} z.$$

2. Найти: $\ln(2+i)$, $1^{\pi i/2}$, e^{i+1} . Решить уравнение: $\sin z = \pi i$.

$$3. D = \{ z : |z-2| > 2, |z-4| < 4 \} \xrightarrow{f=?} G = \{ w : 0 < \operatorname{Im} w < \pi \}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексной переменной. М., 1977.
2. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат В. В.* Методы теории функций комплексной переменной. М., 1973.
4. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексной переменной. М., 1989.
5. *Евграфов М. А.* и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М., 1972.
6. *Долженко Е. П., Николаева С. И.* Теория функций комплексной переменной. М., 1983.

Учебное издание

Борисова Лариса Владимировна,
Новиков Владимир Васильевич,
Тышкевич Сергей Викторович,
Шаталина Анна Васильевна

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие для студентов
механико-математического, физического
и геологического факультетов

Издание второе, исправленное и дополненное

Библиотека "Основы математики"
Выпуск 26

Ответственный за выпуск О. Л. Багаева
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор Г. А. Рогова

Подписано в печать 29.11.2004. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,88(5,25). Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 600 экз. Заказ

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.